МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Областен кръг на олимпиадата по физика, 15.02.2026 г.

Решения на темата за шеста състезателна група (12. клас)

Задача 1. Ускоряващо се трупче

а) Дължината на частта на нишката между трупчето и макарата в началния момент е:

(1) $$l_0 = \sqrt{h^2 + x^2},$$

а след като трупчето достигне масата:

(2) $$l = h.$$

Следователно за това време теглилката се спуска надолу на разстояние:

(3) $$s = l_0 - l = \sqrt{h^2 + x^2} - h,$$ **(0.5 т)**

а силата на тежестта извършва работа:

(4) $$A = m_2 g s = m_2 g \left(\sqrt{h^2 + x^2} - h\right).$$ **(0.5 т)**

Тъй като началната кинетична енергия на телата е нула и няма триене, кинетичната енергия в крайния момент е равна на работата на силата на тежестта:

(5) $$\frac{m_1 v_1^2}{2} + \frac{m_2 v_2^2}{2} = A.$$ **(1.0 т)**

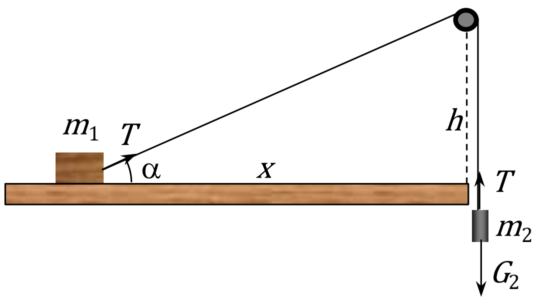
В момента, когато трупчето достига ръба на масата, теглилката достига минимална възможна височина, т.е. в този момент:

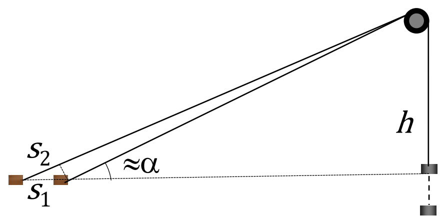
(6) $$v_2 = 0.$$ **(1.0 т)**

Като използваме израза (4) за работата и условието (6), от уравнение (5) намираме:

(7) $$v_1 = \sqrt{\frac{2 m_2 g \left(\sqrt{h^2 + x^2} - h\right)}{m_1}}.$$ **(1.0 т)**

Като алтернативно решение ученикът може да посочи, че пълната механична енергия на системата се запазва. Тогава вместо уравнение (4) трябва да бъде получен израз за промяната на потенциалната енергия на теглилката $\Delta E_{\mathrm{p}} = -m_2 g \left(\sqrt{h^2 + x^2} - h\right)$, а вместо уравнение (5) – да бъде записан законът за запазване на енергията.





б) На фигурата вляво са дадени силите, които оказват влияние върху движението на телата от системата.

Трупчето се ускорява под действие единствено на хоризонталната компонента на силата $\vec{T}$ на опън на нишката:

(8) $$m_1 a_1 = T\cos\alpha,$$ **(0.5 т)**

където α е ъгълът, който нишката сключва с хоризонта. На теглилката действа сила на тежестта и силата T на опън, насочена вертикално нагоре:

(9) $$m_2 a_2 = m_2 g - T.$$ **(0.5 т)**

За малък интервал време Δt, през който ъгълът между нишката и хоризонта на практика не се изменя, можем да приемем, че движението на двете тела е равноускорително. Понеже телата започват да се движат с нулева начална скорост, те изминават път съответно:

(10) $$s_1 = \frac{a_1 \Delta t^2}{2} \text{ и}$$ **(0.25 т)**

(11) $$s_2 = \frac{a_2 \Delta t^2}{2}$$ **(0.25 т)**

Пътят s_2 на теглилката обаче е равен на скъсяването на участъка от нишката, на който е завързано трупчето. От чертежа вдясно е ясно, че за много малки премествания:

(12) $$s_2 = s_1 \cos\alpha,$$ **(0.5 т)**

защото в в крайния момент нишката сключва приблизително същия ъгъл α с масата, както в началния момент. Оттук следва, че:

(13) $$a_2 = a_1 \cos\alpha,$$

което трябва да се докаже. Точките за уравнения (10)–(12) се дават и ако ученикът <u>обоснове</u>, че скоростите на телата удовлетворяват равенството $v_2 = v_1 \cos\alpha$, след което използва, че $v_1 = a_1 \Delta t$ и $v_2 = a_2 \Delta t$, за да получи връзката (13) между двете ускорения.

Уравненията (8), (9) и (13) образуват система с три неизвестни, съответно a_1, a_2, T. Като вземем предвид, че:

(14) $$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h^2}}$$

намираме:

(15) $$a_1 = \frac{m_2 g \cos\alpha}{m_1 + m_2 \cos^2\alpha} = \frac{m_2 g x \sqrt{x^2 + h^2}}{(m_1 + m_2)x^2 + m_1 h^2}$$ **(1.0 т)**

(16) $$a_2 = \frac{m_2 g \cos^2\alpha}{m_1 + m_2 \cos^2\alpha} = \frac{m_2 g x^2}{(m_1 + m_2)x^2 + m_1 h^2}$$ **(1.0 т)**

Ако дадено ускорение е изразено правилно посредством ъгъла α или друг подходящ ъгъл, но не е представено като явен израз на x и h, се отнемат 0.5 точки от оценката за съответния отговор. Ако съотношението (13) е използвано наготово, без доказателство, точките за уравнения (10)–(12) не се дават.

в) Понеже в случая $x^2/h^2 = 10^{-2}$, можем да пренебрегнем x^2 в сравнение с h^2 в изразите за ускоренията. Тогава за ускорението на трупчето получаваме:

(17) $$a_1 \approx \frac{m_2 g x}{m_1 h}$$ **(0.5 т)**

Това означава, че при малко начално отклонение на трупчето от вертикалата, му действа „връщаща" сила към ръба на масата, която се подчинява на закона на Хук:

(18) $$F = m_1 a_1 \approx \frac{m_2 g}{h} x$$

с еквивалентен коефициент на еластичност:

(19) $$k = \frac{m_2 g}{h}.$$

Следователно движението на трупчето от началното му положение до ръба на масата е част от хармонично трептене с период:

(20) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m_1}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_1 h}{m_2 g}}$$ **(0.5 т)**

Точките за уравнения (17) и (20) се дават и за решение, което използва закона за запазване на енергията, за да се обоснове, че движението е част от хармонично трептене. За целта вместо уравнение (17) ученикът трябва да получи, че потенциалната енергия на системата в началното положение е приблизително квадратна функция $E_p \approx 1/2\, m_2 g x^2/h$ на отместването, да въведе еквивалентен коефициент на еластичност (19) и да стигне до израза (20).

Тъй като началната скорост е нула, движението на трупчето съответства на преместване от положение с максимално отклонение до равновесното му положение, т.е. отнема четвърт от периода на трептенето:

(21) $$t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m_1 h}{m_2 g}} \approx 1{,}12\ \mathrm{s}$$ **(1.0 т)**

(0.5 точки за буквен израз и 0.5 точки за числен отговор)

Задача 2. Помпа

а) От уравнението на Клапейрон-Менделеев:

(1) $$pV = nRT_0$$ **(1.0 т)**

следва, че първоначално в гумата се съдържат:

(2) $$n_0 = \frac{p_0 V_\text{г}}{RT_0} = \frac{1{,}0 \cdot 10^5\ \mathrm{Pa} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-3}\ \mathrm{m}^3}{8.31\ \mathrm{J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}} \cdot 300\ \mathrm{K}} = 0{,}08\ \mathrm{mol}$$ **(0.5 т)**

мола въздух, а след като приключи помпането:

(3) $$n_1 = \frac{p_1 V_\text{г}}{RT_0} = 0{,}48\ \mathrm{mol}$$ **(0.5 т)**

б) При всяко движение на буталото нагоре в помпата постъпва еднакво количество въздух при нормално атмосферно налягане:

(4) $$n_\text{п} = \frac{p_0 V_\text{п}}{RT_0} (= 0{,}02\ \mathrm{mol}),$$ **(0.5 т)**

което при движение на буталото надолу влиза в гумата. За N пълни напомпвания е в сила:

(5) $$n_0 + N n_\text{п} \le n_1,$$ **(1.0 т)**

В случая, броят пълни напомпвания съответства на знака за равенство:

(6) $$N = \frac{(p_1 - p_0)V_\text{г}}{p_0 V_\text{п}} = \frac{5\ \text{atm} \cdot 2{,}0\ \text{l}}{1\ \text{atm} \cdot 0{,}5\ \text{l}} = 20$$ **(1.0 т)**

Алтернативно, ученикът може да получи: $N = (n_1 - n_0)/n_\text{п}$ и да използва предварително пресметнатата числената стойност $n_\text{п} = 0{,}02\ \text{mol}$ от уравнение (4).

в) Процесът на помпане е изотермен, което означава, че обмененото количество топлина е:

(7) $$Q = n_1 R T_0 \ln \frac{V_\text{кр}}{V_\text{нач}}$$

където $V_\text{нач}$ е обемът, който n_1 мола въздух са заемали преди помпането при нормално атмосферно налягане p_0, а $V_\text{кр} = V_\text{г}$ е крайният обем при налягане p_1. От закона на Бойл-Мариот за изотермения процес:

(8) $$\frac{V_\text{кр}}{V_\text{нач}} = \frac{p_0}{p_1}$$ **(1.0 т)**

и като използваме израза (3) за броя молове, получаваме:

(9) $$Q = p_1 V_\text{г} \ln \frac{p_0}{p_1} \approx -2150\ \text{J}$$ **(1.0 т)**

г) В случая помпането е <u>адиабатно свиване</u>, при което температурата на въздуха се повишава. Нека T_1 е крайната температура на въздуха в гумата при налягане p_1. От уравнението $pV^\gamma = \text{const}$ **(0.5 т)** за адиабатен процес следва:

(10) $$T^\gamma / p^{\gamma - 1} = \text{const}$$ **(0.5 т)**

Оттук получаваме:

(11) $$T_1 = T_0 \left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \approx 1{,}67 T_0 \approx 500\ \text{K}$$ **(1.0 т)**

Точката се дава или за буквения израз, или за някой от числените отговори. От уравнението на Клапейрон-Менделеев следва:

(12) $$n' = \frac{p_1 V_\text{г}}{R T_1} = n_1 \left(\frac{p_0}{p_1}\right)^{\frac{\gamma - 1}{\gamma}} \approx 0{,}6 n_1 = 0{,}288\ \text{mol}$$ **(0.5 т)**

Точките се дават или за някой от буквените изрази, или за някой от числените отговори. При всяко движение на буталото нагоре в помпата влиза въздух с нормално атмосферно налягане p_0 и с температурата T_0 на външния въздух. Затова с всяко пълно помпане в помпата, а после и в гумата, постъпва същия брой $n_\text{п}$ мола въздух, както в първия случай. Като използваме уравнение (5) и заменим крайния брой молове с n', получаваме:

(13) $$N' \leq \frac{n' - n_0}{n_\text{п}} = 10{,}4$$ **(0.5 т)**

Следователно трябва да бъдат направени $N' = 10$ пълни напомпвания. **(0.5 т)**

Задача 3. Кондензатори

а) При отворен ключ двата кондензатора са свързани последователно към източника на напрежение. Еквивалентният капацитет на системата е:

(1) $$C = \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2}$$ **(1.0 т)**

Върху положителните плочи на кондензаторите се натрупва еднакво количество заряд:

(2) $$q = C\mathcal{E} = C_1 C_2 \mathcal{E}/(C_1 + C_2)$$ **(1.0 т)**

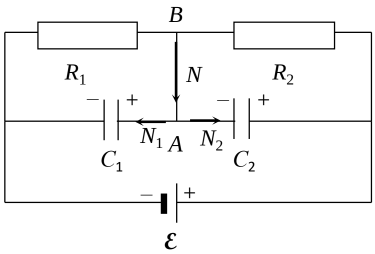
Тогава напреженията върху кондензаторите съответно са:

(3) $$U_1 = \frac{q}{C_1} = \frac{C_2 \mathcal{E}}{C_1 + C_2} = 6{,}0\ \mathrm{V}$$ **(1.0 т)**

(4) $$U_2 = \frac{q}{C_2} = \frac{C_1 \mathcal{E}}{C_1 + C_2} = 4{,}0\ \mathrm{V}$$ **(1.0 т)**

За всеки от отговорите се дават по 0,5 т за буквен израз и 0,5 т за числена стойност.

б) След затваряне на ключа кондензаторите се презареждат поради преминаване на определено количество заряд през ключа. След като върху кондензаторите се установят постоянни напрежения, през ключа престава да тече ток и през двата последователно свързани резистора се установяват еднакъв ток:



(5) $$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2}$$ **(1.0 т)**

Напрежението върху кондензаторите C_1 и C_2 е равно съответно на напрежението върху резисторите R_1 и R_2:

(6) $$U_1' = IR_1 = \frac{R_1 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 3{,}0\ \mathrm{V}$$ **(1.0 т)**

(7) $$U_2' = IR_2 = \frac{R_2 \mathcal{E}}{R_1 + R_2} = 7{,}0\ \mathrm{V}$$ **(1.0 т)**

За всеки от отговорите се дават по 0,5 т за буквен израз и 0,5 т за числена стойност.

в) След затваряне на ключа зарядът върху положителната плоча на C_1 намалява с:

(8) $$\Delta q_1 = C_1(U_1 - U_1') = 1{,}2 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}.$$ **(0.5 т)**

Това означава, че от т. A към тази плоча преминават:

(9) $$N_1 = \Delta q_1 / e = 7{,}5 \cdot 10^{10}\ \text{електрона}.$$ **(0.5 т)**

Зарядът върху положителната плоча на C_2 съответно се увеличава с:

(10) $$\Delta q_2 = C_2(U_2' - U_2) = 1{,}8 \cdot 10^{-8}\ \mathrm{C}.$$ **(0.5 т)**

Съответно зарядът върху отрицателната плоча нараства по абсолютна стойност, т.е. от т. A към нея се преминават:

(11) $$N_2 = \Delta q_2 / e = 11{,}25 \cdot 10^{10}\ \text{електрона}.$$ **(0.5 т)**

Следователно през ключа преминават общо:

(12) $$N = N_1 + N_2 \approx 1{,}9 \cdot 10^{11}\ \text{електрона}.$$ **(0.5 т)**

в посока <u>от точка *B* към точка *A*</u>. **(0.5 т)**