**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**

**ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, ОБЛАСТЕН КРЪГ, 15 февруари 2026 г.**

**Тема за 11. клас (пета състезателна група)**

**РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ**

**ЗАДАЧА 1. Полет**

**а)** При движение във вертикално направление:

$v_y(t) = v_0\sin\alpha - gt$ **[0,5 т.]**

$y(t) = h_0 + v_0 \sin\alpha\, t + gt^2/2$ **[0,5 т.]**

В най-високата точка $v_y = 0$, откъдето времето на полета е:
$t_H = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$ **[0,5 т.]**

Височината в този момент е съответно:

$H = y(t_H) = h_0 + v_0\sin\alpha\frac{v_0\sin\alpha}{g} - \frac{g}{2}\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 = h_0 + \frac{v_0^2\sin^2\alpha}{2g}$ **[0,5 т.]**

**б)** Падането в морето е при $y(T) = 0$ **[0,5 т.]**: $0 = h_0 + v_0\sin\alpha\, T - \frac{g}{2}T^2$. **[0,5 т.]**
Това е квадратно уравнение спрямо $T$ **[0,5 т.]**. Вземаме положителния корен **[0,5 т.]** и получаваме:

$T = \frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh_0}}{g}$ **[1 т.]**

**в)** За далечината на полета имаме $L = v_0\cos\alpha T$ **[0,5 т.].** Заместваме с намереното време от подточка б) **[0,5 т.]** и получаваме: $L = x(T) = v_0\cos\alpha T = v_0\cos\alpha\frac{v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh_0}}{g} = \frac{v_0\cos\alpha}{g}\left(v_0\sin\alpha + \sqrt{v_0^2\sin^2\alpha + 2gh_0}\right)$ **[1 т.]**

**г)** Използваме уравнението на траекторията.
От $t = \frac{x}{v_0\cos\alpha}$ **[0,3 т.]**: $y(x) = h_0 + x\mathrm{tg}\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ **[0,3 т.]**

При падане $y(L) = 0$ **[0,3 т.]**: $0 = h_0 + L\mathrm{tg}\alpha - \frac{gL^2}{2v_0^2}(1 + \mathrm{tg}^2\alpha)$ **[0,3 т.]**

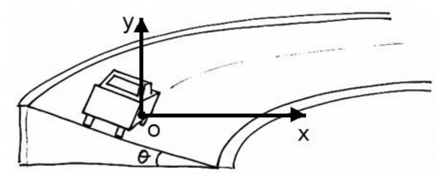
Нека $u = \mathrm{tg}\alpha$. Получава се квадратно уравнение спрямо $u$:

$\frac{gL^2}{2v_0^2}u^2 - Lu + \left(\frac{gL^2}{2v_0^2} - h_0\right) = 0$ **[0,3 т.]**
За да съществува реален корен, трябва дискриминантата $D \geq 0$. **[0,3 т.]**
Максималната далечина $L$ съответства на граничния случай $D = 0$. **[0,3 т.]**

След алгебрични преобразувания получаваме: $L_{\max} = \frac{v_0}{g}\sqrt{v_0^2 + 2gh_0}$ **[0,3 т.]** и $u = \mathrm{tg}\alpha_{\max} = \frac{v_0}{\sqrt{v_0^2+2gh_0}}$ $[\mathbf{0,6}\ \text{т.}]$

**ЗАДАЧА 2. Завой**

Ще въведем координатна система с център моментното положение на автомобила, ос Оу вертикална нагоре и ос Ох насочена към центъра на кривината, както е показано на чертежа.




$N_x = N\sin\theta,\ N_y = N\cos\theta$ и $f_x = f\cos\theta,\ f_y = f\sin\theta$
а) При хоризонтален път $N = mg$ **[0,5 т.].** Единствената сила към центъра е триенето, следователно: $f = \frac{mv^2}{R}$ **[0,5 т.].** Условие за неприплъзване: $f \leq kN = kmg$ **[0,5т.]**

Следователно $\frac{mv^2}{R} \leq kmg \ \Rightarrow\ v^2 \leq kgR \ \Rightarrow\ v_{\max} = \sqrt{kgR}$ **[0,5 т.].**

б) Без триене действат $mg$ и $N$.

По оста *Oy*: $N\cos\theta = mg$ **[0,5 т.]**. По оста *Ox*: $N\sin\theta = \frac{mv^2}{R}$ **[0,5 т.].**

Делим второто уравнение на първото и получаваме: $\mathrm{tg}\theta = \frac{v^2}{gR} \ \Rightarrow\ v_0 = \sqrt{gR\mathrm{tg}\theta}$ **[1 т.]**

в) При минимална скорост автомобилът е „склонен“ да се плъзне надолу (към по-ниския край), затова триенето действа нагоре по наклона.

По оста Оу ускорението е 0: $N\cos\theta + f\sin\theta = mg$ **[0,5 т.].** По оста Ох: $N\sin\theta - f\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$ **[0,5 т.].** Замествайки с $f = kN$: $N(\cos\theta + k\sin\theta) = mg \ \Rightarrow\ N = \frac{mg}{\cos\theta + k\sin\theta}$ **[0,5 т.]**
$N(\sin\theta - k\cos\theta) = \frac{mv^2}{R}$ **[0,5 т.]**

Комбинираме и получаваме: $\frac{mg}{\cos\theta+k\sin\theta}(\sin\theta - k\cos\theta) = \frac{mv^2}{R}$ **[0,5 т.]**
Съкращаваме $m$ и получаваме:

$v^2 = gR\,\frac{\sin\theta - k\cos\theta}{\cos\theta + k\sin\theta} \ \Rightarrow\ v_{\min} = \sqrt{gR\,\frac{\sin\theta - k\cos\theta}{\cos\theta + k\sin\theta}}$ **[0,5 т.]**
г) Спрямо предишната подточка трябва да съобразим, че при висока скорост колата ще се приплъзва навън, следователно триенето ще има противоположна посока:

$N\cos\theta - f\sin\theta = mg$ **[0,5 т.]**

$N\sin\theta + f\cos\theta = \frac{mv^2}{R}$ **[0,5 т.]**

Решението за $N$ и $f$: $N = m(g\cos\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta)$ **[0,5 т.]** и $f = m(\frac{v^2}{R}\cos\theta - g\sin\theta)$ **[0,5 т.]**

На границата на сцепление: $k_{\min} = \frac{|f|}{N} = \frac{|\frac{v^2}{R}\cos\theta - g\sin\theta|}{g\cos\,\theta + \frac{v^2}{R}\sin\theta}$ **[0,5 т.]**

Числено: $v = 216\,\text{mph} = 216.\frac{1609}{3600}\,\text{m/s} \approx 96{,}54\,\text{m/s}$, $\sin\,33° \approx 0{,}545$, $\cos\,33° \approx 0{,}839$

Заместваме и получаваме: $k_{\min} \approx 0{,}82$ **[0,5 т.]**

**ЗАДАЧА 3. Трупче върху клин**

а) Спрямо избраната КС клинът се ускорява наляво, т.е. $\vec{a}_{\text{клин}} = (-a_M, 0)$. Ускорението на трупчето спрямо земната повърхност е $\vec{a} = (a_x, a_y)$. Следователно относителното ускорение на трупчето спрямо клина е

$\vec{a}_{\text{rel}} = \vec{a} - \vec{a}_{\text{клин}} = (a_x, a_y) - (-a_M, 0) = (a_x + a_M,\, a_y)$. **[1 т.]**

Трупчето остава в контакт с наклонената страна и се движи по нея, затова $\vec{a}_{\text{rel}}$ е насочено по наклона. Наклонът сключва ъгъл $\alpha$с хоризонталата, следователно отношението на компонентите на всеки вектор, паралелен на наклона, е $\text{tg}\,\alpha$. **[1 т.]**

Следователно $\frac{a_y}{a_x + a_M} = \text{tg}\alpha$.

*Алтернативно решение.* За времето $t$, за което трупчето се спуска от върха до основата на клина, то изминава нъв вертикална посока разстояние, равно на височината на клина: $h = a_y t^2/2$ **[0,5 т.]** и се премества надясно в хоризонтална посока на разстояние: $s_1 = a_x t^2/2$. Същевременно клинът се премества наляво на разстояние $s_2 = a_M t^2/2$. Следователно трупчето се оказва на разстояние $s = s_1 + s_2 = (a_x + a_M)t^2/2$ **[0,5 т.]** от вертикалната стена на клина . Очевидно, че $h$ и $s$ са съответно срещулежащ и прилежащ катет срещу ъгъла $\alpha$, т.е. $h/s = \text{tg}\,\alpha$, **[0,5 т.]** откъдето получаваме търсеното съотношение $\frac{a_y}{a_x + a_M} = \text{tg}\alpha$ **[0,5 т.].**

б) За трупчето (II принцип на Нютон) по осите $x$ и $y$:

$ma_x = N\sin\alpha,\ ma_y = mg - N\cos\alpha$ **[1 т.]**

За клина по $x$: върху клина действа хоризонталната компонента на реакцията от трупчето $-N\sin\alpha$, а ускорението е наляво $-a_M$, следователно

$M(-a_M) = -N\sin\alpha \;\Rightarrow\; N\sin\alpha = Ma_M$ **[0,5 т.]**

От първото уравнение за трупчето и уравнението за клина следва

$ma_x = Ma_M \;\Rightarrow\; a_x = \frac{M}{m}a_M$. От кинематичната връзка от а)

$a_y = (a_x + a_M)\text{tg}\alpha = a_M\left(1+\frac{M}{m}\right)\text{tg}\alpha = a_M\frac{m+M}{m}\text{tg}\alpha$ **[0.5 т.]**

От уравнението по $Ox$ и клина имаме $N = \frac{Ma_M}{\sin\alpha}$. Замествайки $N$ и $a_y$в уравнението по $Oy$:

$$mg - \left(\frac{Ma_M}{\sin\alpha}\right)\cos\alpha = m[a_M\frac{m+M}{m}tg\alpha]$$
$$mg = a_M(M\text{ct}g\alpha + (M+m)\text{tg}\alpha)$$

Преминаваме към sin , cos и след привеждане: $a_M = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ **[1 т.]**

в) От уравнението за клина $N\sin\alpha = Ma_M$ следва $N = \frac{Ma_M}{\sin\alpha}$ **[1 т.]**

Замествайки намереното в подточка б) $a_M = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$, получаваме

$N = \frac{M}{\sin\alpha}.\frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha} = \frac{mMg\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ **[1 т.]**

г) Относителното ускорение $a_{rel}$ е хипотенуза в триъгълника на относителните ускорения $\left(a_{x,\text{rel}} \text{ и } a_y\right)$: $a_{\text{rel}} = \frac{a_y}{\sin\alpha}$ или $a_{\text{rel}} = \frac{a_x+a_{\text{M}}}{\cos\alpha}$ **[1 т.]**

Използваме $a_x + a_M = a_M\left(1+\frac{M}{m}\right) = a_M\frac{m+M}{m}$:

$a_{\text{rel}} = \frac{a_M(M+m)}{m\cos\alpha}$ **[1 т.]**

Заместваме $a_M$:

$a_{\text{rel}} = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}.\frac{M+m}{m\cos\alpha} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$ **[1 т.]**

*Алтернативно решение.* Спрямо клина трупчето изминава разстояние, равно на хипотенузата $\ell$ на клина, докато се спусне. От закона за равноускорително движение: $\ell = a_{\text{rel}}t^2/2$. **[1 т.]** От друга страна, ако разглеждаме движението на трупчето спрямо земята: $h = a_y t^2/2$. **[1 т.]** Като вземем предвид, че $h = \ell\sin\alpha$, изразяваме: $a_{\text{rel}} = a_y/\sin\alpha$. Вземаме предвид получените в предишните точки резултати: $a_y = a_M\frac{m+M}{m}\text{tg}\alpha$ и $a_M = \frac{mg\sin\alpha\cos\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$, откъдето получаваме окончателно: $a_{\text{rel}} = \frac{(M+m)g\sin\alpha}{M+m\sin^2\alpha}$. **[1 т.]**