МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ПРОЛЕТНО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
7 март 2026 г., гр. София
Тема за XII клас (шеста състезателна група)
Примерни решения и указания

Решение на зад. 1 – Галилеево оръдие **(10 т.)**

а) Понеже ударът е кратковременен и идеално еластичен важат законите за запазване на импулса и енергията. Откъдето:

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1u_1^2 + \frac{1}{2}m_2u_2^2 \end{aligned} \quad \textbf{(1.5 т.)}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} m_1(v_1 - u_1) &= -m_2(v_2 - u_2) \\ m_1(v_1 - u_1)(v_1 + u_1) &= -m_2(v_2 - u_2)(v_2 + u_2) \end{aligned}$$

Понеже скоростите преди и след удара са различни в общия случай, то $v_1 - u_1, v_2 - u_2 \neq 0$. Така след съкращаване във второто уравнение се получава

$$v_1 + u_1 = v_2 + u_2 \Rightarrow \boxed{u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2)} \quad \textbf{(1.5 т.)}$$

което и бе дадено в подсказката. Така получаваме система линейни уравнения, която се решава лесно.

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1u_1 + m_2u_2 \\ v_2 - v_1 &= u_1 - u_2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} u_1 &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2 \\ u_2 &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2 \end{aligned}} \quad \textbf{(1 т.)}$$

б) Двете топки започват падането си едновременно и следователно непосредствено преди момента, в който долната удря земята, двете топки се движат надолу с еднаква скорост $v = \sqrt{2gh}$. **(0.25 т.)** Заради малкото разстояние между топките, първо се удря долната, непосредствено след което се движи със скорост v нагоре към горната топка. Малко след това двете топки се удрят. Така в този случай, имаме $v_1 = v$ и $v_2 = -v$. **(0.25 т.)** Оттук за скоростта на горната топка след удара се получава:

$$u_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}(+v) + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}(-v) = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

За височината H, на която се издига горната топка след удара, имаме $H = u_2^2/2g$

$$\boxed{H = \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h} \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

в) Понеже $m_1 \gg m_2$, то $m_2/m_1 \ll 1$, откъдето:

$$H = \left(\frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2}\right)^2 h = \left(\frac{3 - \frac{m_2}{m_1}}{1 + \frac{m_2}{m_1}}\right)^2 h \approx \left(\frac{3 - 0}{1 + 0}\right)^2 h \Rightarrow \boxed{H \approx 9h} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

г) При повече от две топки, процесът описан горе става каскаден – топка 1 отскача от земята и след това се удря в топка 2, която от своя страна удря топка 3. **(0.25 т.)** Допреди удара между топки 2 и 3, всичко е аналогично на разгледания в б) случай.

$$u_2 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

От своя страна $v_3 = -v$, откъдето за u_3 се получава:

$$u_3 = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_2 + \frac{m_3 - m_2}{m_2 + m_3}(-v) = \frac{2m_2}{m_2 + m_3} u_2 + \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

Топка 3 ще достигне максимална височина, ако след удара с топка 2 тя има максимална скорост, т.е. трябва u_3 да е максимална. Това се случва, когато u_2 е максимална (следва от горното уравнение). **(0.25 т.)** За нея обаче имаме

$$u_2 = \frac{3m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v < \frac{3m_1 + 3m_2}{m_1 + m_2} v = 3v$$

В същото време, при $m_2 \ll m_1$ получихме, че $u_2 \approx 3v$ **(0.25 т.)**, т.е. при $m_2 \ll m_1$ се постига горната граница на u_2. Тогава имаме

$$u_3 \approx \frac{2m_2}{m_2 + m_3}(3v) + \frac{m_2 - m_3}{m_2 + m_3}(v) = \frac{7m_2 - m_3}{m_2 + m_3} v = \left(7 - \frac{8\frac{m_3}{m_2}}{1 + \frac{m_3}{m_2}}\right) v < 7v$$

Виждаме, че отново при $m_3 \ll m_2$, когато $m_3/m_2 \ll 1$ се постига на практика максималната стойност за u_3, а именно $u_3 \approx 7v$. **(0.5 т.)**

Оттук за $H_{\max}$ имаме $\boxed{H_{\max} = 7^2 h = 49h}$. **(0.25 т.)**

д) При повече от 3 топки, процесът отново е каскаден, като първо топка 1 отскача от земята и след това се удря в топка 2, която от своя страна удря топка 3, която пък се удря в топка 4 и т.н. Нека за улеснение въведем означенията $v_k = -v$ за скоростите на топките преди първият им удар (който е с топка $k-1$), а u_k за скоростите им след първия им удар.

Стъпка 1: Намиране на рекурентна зависимост **(1.25 т.)**

Вариант 1: Пряко решаване

Тогава имаме:

$$u_k = \frac{m_k - m_{k-1}}{m_k + m_{k-1}} v_k + \frac{2m_{k-1}}{m_k + m_{k-1}} u_{k-1} = \frac{2}{1 + \frac{m_k}{m_{k-1}}} u_{k-1} + \frac{1 - \frac{m_k}{m_{k-1}}}{1 + \frac{m_k}{m_{k-1}}} v$$

като $u_1 = v$, понеже топка 1 се удря в земята (а не в топка 0, каквато няма в задачата). **(0.5 т.)**

Аналогично на разсъжденията направени по-горе за $N = 3$, за да достигне топка N най-голяма височина трябва да е максимално u_N, за което трябва u_{N-1} да е имаксимално и т.н. **(0.25 т.)** Това става при $m_{k-1} \gg m_k$ **(0.25 т.)**, при което се получава:

$$u_k = 2u_{k-1} + v \qquad u_1 = v \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

Вариант 2: Съображение на база подсказката

Максимална височина се достига при максимална скорост, която на свой ред се постига при максимална скорост на топката отдолу и т.н. **(0.25 т.)** При удара, топката отдолу се забавя от u_{k-1} до w_{k-1}, като $0 < w_{k-1} < u_{k-1}$, защото част от нейния импулс отива за обръщане посоката на скоростта на горната по-лека топка. **(0.25 т.)** Използвайки подсказката, имаме

$$u_k - w_{k-1} = u_{k-1} - v_k = u_{k-1} + v \Rightarrow u_k = u_{k-1} + w_{k-1} + v \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

Тогава u_k е максимално при $w_{k-1} \to u_{k-1}$, т.е. когато ударът между топки k и $k-1$ на практика не променя скоростта на топка $k-1$ (т.е. на долната топка). Това става при $m_{k-1} \gg m_k$. **(0.25 т.)** Тогава

$$u_k = 2u_{k-1} + v \qquad u_1 = v \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

Стъпка 2: Решаване на рекурентната зависимост **(1.0 т.)**

Вариант 1: Анзатц и индукция
Решаваме за първите няколко и получаваме

$$\begin{array}{cccc} & u_2 = 2u_1 + v = 3v & \Rightarrow & u_3 = 2u_2 + v = 7v \\ \Rightarrow & u_4 = 2u_3 + v = 15v & \Rightarrow & u_5 = 2u_4 + v = 31v \end{array}$$

Забелязваме, че $u_k = (2^k - 1)v$. **(0.5 т.)** Проверяваме по индукция.
За $k = 1$, $u_1 = u_N = (2^1 - 1)v = v$ – OK.
За някакво k е изпълнено, т.е. $u_k = (2^k - 1)v$.
За $k + 1$ имаме

$$u_{k+1} = 2u_k + v = 2(2^k - 1)v + v = (2^{(k+1)} - 1)v \Rightarrow \text{ OK}$$

Така финално $u_N = (2^N - 1)v$. **(0.5 т.)**

Вариант 2: Директно решаване
Получената рекурентна зависимост може да бъде решена и явно.

$$u_k = 2u_{k-1} + v \Rightarrow (u_k + v) = 2(u_{k-1} + v) \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

Откъдето редицата $u_k + v$ образува геометрична прогресия и имаме

$$u_k + v = 2^{k-1}(u_1 + v) \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Понеже $u_1 = v$, то $u_N + v = 2^{N-1}(u_1 + v) = 2^N v$. Откъдето пък $u_N = (2^N - 1)v$. **(0.25 т.)**

Финално $H_{\max} = u_N^2/2g$ и понеже получихме, че $u_N = (2^N - 1)v = (2^N - 1)\sqrt{2gh}$, то

$$\boxed{H_{\max} = (2^N - 1)^2 h} \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

Решение на зад. 2 – LIGO **(10 т.)**

а) Понеже всеки от двата лъча изминава далжината на даденото рамо 2 пъти (един път от полупрозрачното огледало до огледалото и втори път обратно), то разликата в изминатите оптични пътища на двата лъча ще е $\Delta s_0 = 2\Delta L_0$ **(0.5 т.)**. Условието за деструктивна интерференция е $\Delta s_0 = (k + \frac{1}{2})\lambda$, за цели k. **(0.5 т.)** Така $\Delta L_0 = (\frac{k}{2} + \frac{1}{4})\lambda$, откъдето търсената минимална разлика в дължините е (при $k = 0$) $\boxed{\Delta L_0 = \lambda/4 = 266\,\text{nm}}$. **(0.5 т.)**

б) Разликата в оптичните пътища изминати от двата лъча, по аналогия с подусловие а), е $\Delta s = 2(L_1 - L_2) + \Delta s_0$, където Δs_0 е разликата в оптичните пътища в отсъствие на гравитационни вълни ($h = 0$), получена в предното подусловие, а $2(L_1 - L_2)$ е разликата в оптичните пътища, получена в следствие на гравитационната вълна. **(1.0 т.)** Т.е.

$$\Delta s = \Delta s_0 + 2(L_1 - L_2) = \frac{\lambda}{2} + 2L_0 h \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Откъдето

$$I(t) = 4I_0 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi L_0}{\lambda} h(t)\right) \Rightarrow \boxed{I(t) = 4I_0 \sin^2\left(\frac{2\pi L_0}{\lambda} h(t)\right)} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

където е използвано тъждеството $\cos(x + \pi/2) = -\sin(x)$.

в) Понеже $h \ll 1$, то е приложимо приближението $\sin x \approx x$ и се получава:

$$I(t) = 4I_0 \sin^2\left(\frac{2\pi L_0}{\lambda} h(t)\right) \approx 4I_0 \left(\frac{2\pi L_0 h}{\lambda}\right)^2$$

Откъдето

$$\boxed{I(t) \approx Ch^2(t)} \quad \text{и} \quad \boxed{C = I_0 \left(\frac{4\pi L_0}{\lambda}\right)^2} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

г) От графиката виждаме, че при $t = 0$ се наблюдава максимален интензитет при детектора от $I_{\max} \approx 3.75 \cdot 10^{-21} I_0$. **(0.5 т.)** От полученото във в) следва

$$I_{\max} \approx I_0 \left(\frac{4\pi L_0 h_{\max}}{\lambda}\right)^2 \Rightarrow h_{\max} \approx \frac{\lambda}{4\pi L_0} \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_0}} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Промяната в дължината на едно рамо е $\delta L = hL_0/2$ **(0.25 т.)** откъдето

$$\delta L_{\max} = \frac{\lambda}{8\pi} \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_0}} \Rightarrow \boxed{\delta L_{\max}[r_p] = \frac{\lambda}{8\pi r_p} \sqrt{\frac{I_{\max}}{I_0}}} \quad \textbf{(0.25 т.)}$$

За числената стойност се получава

$$\delta L_{\max}[r_p] = \frac{1.064 \cdot 10^{-6}}{8 \cdot 3.14 \cdot (0.84 \cdot 10^{-15})} \sqrt{3.75 \cdot 10^{-21}} \Rightarrow \boxed{\delta L_{\max}[r_p] \approx 3 \cdot 10^{-3}} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Т.е. с помощта на постановката LIGO човечеството измерва удължавания и скъсявания от порядъка на една хилядна от радиуса на протона!

д) Понеже всяка от черните дупки се движи по окръжност с радиус $d/2$ с постоянна ъглова скорост $\omega = 2\pi/T = 2\pi f$, то те се движат с постоянно центростремително ускорение $a = \omega^2 d/2$ **(1.0 т.)**. Това ускорение се получава в следствие на гравитационното привличане между двете черни дупки със сила $F = GM^2/d^2$ **(0.5 т.)**, откъдето

$$F = \frac{GM^2}{d^2} = Ma = \frac{\omega^2 Md}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2GM}{d^3}} = \sqrt{\frac{Rc^2}{d^3}} = \frac{c}{R} \frac{1}{(d/R)^{3/2}}$$

Откъдето

$$\boxed{f = \frac{c}{2\pi R} \frac{1}{(d/R)^{3/2}}} \quad \textbf{(1.0 т.)}$$

е) При $d = 2R$ имаме:

$$f = \frac{c}{2\pi R}\frac{1}{(2R/R)^{3/2}} = \frac{c}{4\sqrt{2}\pi R} \Rightarrow R = \frac{c}{4\sqrt{2}\pi f} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

И понеже $R = \frac{2GM}{c^2}$, то

$$\Rightarrow \boxed{M = \frac{c^3}{8\sqrt{2}\pi G f}} \quad \text{и} \quad \boxed{M[M_\odot] = \frac{c^3}{8\sqrt{2}\pi G M_\odot f}} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Откъдето, за $f = 75\,\mathrm{Hz}$ се получава:

$$M[M_\odot] \approx \frac{(3\cdot 10^8)^3}{8\sqrt{2}\cdot 3.14\cdot 6.67\cdot 10^{-11}\cdot 2\cdot 10^{30}\cdot 75} \Rightarrow \boxed{M[M_\odot] \approx 76} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Допълнение за любознателните:

Графиката, дадена в условието, е направена така, че сливането настъпва при $t = 0$. Лесно се вижда, че честотата на сигнала при детектора е ок. $f_I \sim 280\,\mathrm{Hz}$. Понеже това е честотата на $I \sim h^2$, то честотата f_{GW} на гравитационната вълна h е всъщност $f_{\mathrm{GW}} \sim 280\,\mathrm{Hz}/2 = 140\,\mathrm{Hz}$. Това е 2 пъти по-висока честота от дадената в последното подусловие честота от $f = 75\,\mathrm{Hz}$. Причината в този случай (когато двете тела са еднакви) е, че за даден орбитален период една и съща конфигурация на двете черни дупки се повтаря два пъти – на всеки половин период двете черни дупки си разменят местата. Оказва се, че $f_{\mathrm{GW}} = 2f_{\text{орб.}}$ е вярно и по принцип – честотата на вълните е два пъти орбиталната честота.

Предположението, че сливането настъпва при $d = 2R$ и че е приложима класическата физика, е доста грубо, но позволява да се получат някои адекватни оценки, както и да се получи представа за това как по принцип се извлича информация от засечената гравитационна вълна. Пресметнатата с помощта на общата теория на относителността маса на една черна дупка е всъщност ок. $30M_\odot$, т.е. нашият груб класически модел надценява истинската маса около 2 пъти.

Решение на зад. 3 – Кондензатор с газ **(10 т.)**

а) Полето E в кондензатора е хомогенно. Щом разстоянието между двете плочи е d, а напрежението на кондензатора е U, то $E = U/d$. **(0.5 т.)** Тогава интензитетът на полето, създадено от една от плочите, е $E_1 = E/2 = U/(2d)$. **(0.5 т.)** От друга страна, капацитетът на този кондензатор е $C = \varepsilon_0 S/d$, където S е площта на една от плочите. Откъдето зарядът върху една от плочите е $Q = CU = \varepsilon_0 SU/d$. **(0.5 т.)** Така силата, която действа върху една от плочите, е

$$\boxed{F = QE_1 = \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2d^2}} \textbf{(0.5 т.)}$$

б) В началото налягането на газа уравновесява силата на тежестта на буталото и следователно началното налягане на газа е $p_0 = Mg/S$. **(0.5 т.)** След зареждане на кондензатора, на плочата и действат три сили – силата на тежестта Mg, силата на привличане между плочите F и силата, с която газът го натиска pS. Условието за равновесие е $Mg + F = pS$, т.е. $F/S = p - p_0$. **(0.5 т.)** В равновесието, достигнато след достатъчно време, кондензаторът ще се е заредил до напрежение U, а разстоянието между плочите ще е L. Тогава

$$\frac{F}{S} = \frac{\varepsilon_0 U^2}{2L^2} = p - p_0 \quad \textbf{(0.3 т.)}$$

Понеже процесът на зареждане и промяна на разстоянието между плочите е достатъчно бавен, така че газът да обменя колкото топлина е нужно с околната среда, то процесът може да се счита за изотермен, т.е. $p_0V_0 = pV$ или $p_0L_0 = pL$. **(0.7 т.)** Така се получава:

$$\frac{\varepsilon_0 U^2}{2L^2} = p - p_0 = p_0\left(\frac{L_0}{L} - 1\right) = \frac{Mg}{S}\left(\frac{L_0}{L} - 1\right)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{L}{L_0}\right)^2 - \left(\frac{L}{L_0}\right) + \frac{\varepsilon_0 S U^2}{2MgL_0^2} = 0 \Rightarrow L = L_0\frac{1 \pm \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_0 S U^2}{MgL_0^2}}}{2} \quad \textbf{(1 т.)}$$

Ако $U = 0$, то би трябвало $L = L_0$, понеже няма какво да предизвика промяна. Затова избираме знакът $+$ пред корена. Така

$$\boxed{L = L_0\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{2\varepsilon_0 S U^2}{MgL_0^2}}}{2}} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

в) За да съществува равновесно положение, трябва квадратното уравнение от предното подусловие да има решение, т.е.

$$\frac{2\varepsilon_0 S U^2}{MgL_0^2} \leq 1 \Rightarrow U^2 \leq \frac{MgL_0^2}{2S\varepsilon_0} \Rightarrow \boxed{U_{\max} = \sqrt{\frac{MgL_0^2}{2S\varepsilon_0}}} \quad \textbf{(1 т.)}$$

Откъдето пък

$$L = L_0\frac{1 + \sqrt{1 - (U/U_{\max})^2}}{2}$$

Допълнение за любознателните:
При напрежения над $U_{\max}$ силата на привличане ще надделява над налягането на газа и буталото би трябвало да залепне за долната плоча. Ясно е, че това няма как да стане, понеже е невъзможно газ да се компресира до обем 0.
При такива напрежения, буталото ще се движи надолу, докато нещо не се промени от предположенията направени в условието. Например може газът да се втечни. Възможно е и да се стигнат до такива интензитети на електричното поле, при които да се получи пробив на газа и т.н.

г) При даденото напрежение $U = U_{\max}\sqrt{3/4}$, за L и налягането в равновесие p' се получава

$$L = L_0\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{3}{4}}}{2} = \frac{3L_0}{4} \quad \text{и} \quad p' = p_0\frac{L_0}{L} = \frac{4}{3}p_0 \qquad \textbf{(0.5 т.)}$$

Понеже кондензаторът е разкачен от източника, то зарядът върху плочите не се променя по време на трептенията. Оттук следва, че силата на привличане между плочите $f = p'S - Mg$ също няма да се променя по време на трептенията. **(0.7 т.)**
Нека буталото се отклони на разстояние x от равновесното си положение, като новото разстояние между буталото и основата на цилиндъра е $L + x$.
Тъй като трептенията са бързи и газът не обменя топлина, то процесът е адиабатен, т.е. $pV^\gamma = \text{const}$, където $\gamma = 5/3$ (газът е едноатомен) **(0.7 т.)**. Тъй като $V = LS$ имаме

$$p'L^\gamma = p(L + x)^\gamma \Rightarrow p = p'\left(1 + \frac{x}{L}\right)^{-\gamma} \approx p' - p'\gamma\frac{x}{L} \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Оттук силата, която действа върху буталото при отклонение x е

$$F(x) = pS - Mg - f = (p - p')S = -\frac{\gamma p'S}{L}x = -\frac{16\gamma p_0 S}{9L_0}x = -\frac{16\gamma Mg}{9L_0} = -kx \quad \textbf{(0.5 т.)}$$

Така връщащата сила е еквивалентна на силата на разтегната пружина с твърдост $k = 16\gamma Mg/(9L_0)$. Следователно

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{M}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{9L_0}{16\gamma g}} \Rightarrow T = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{L_0}{\gamma g}} \Rightarrow \boxed{T = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{3L_0}{5g}}} \quad \textbf{(0.6 т.)}$$