

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА  
ПРОЛЕТНО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА**

7 март 2026 г., гр. София

Тема за XII клас (шеста състезателна група)

**Зад. 1 Галилеево оръдие (10 т.)**

Две еластични топчета с маси съответно  $m_1$  и  $m_2$  се движат по оста  $x$ . Скоростите им са съответно  $v_1, v_2$  ( $v > 0$  означава, че тялото се движи в положителна посока по оста  $x$ ). Двете топчета се удрят и след удара имат скорости съответно  $u_1$  и  $u_2$ .

**а)** Изразете скоростите  $u_1$  и  $u_2$  на двете топчета след удара чрез  $m_1, m_2, v_1, v_2$ . (4 т.)

*Подсказка:* Покажете, че  $u_1 - u_2 = -(v_1 - v_2)$ . Това може да ви е полезно и по-нататък в задачата.

Нека  $m_1 > m_2$ . Топка 2 е поставена върху топка 1 така, че да има малко, ненулево, но пренебрежимо разстояние между тях. Тази конфигурация е издигната на височина  $h$ , както е показано на чертежа. Приемете, че ударите помежду топките и между топките и земята са идеално еластични и мигновени.

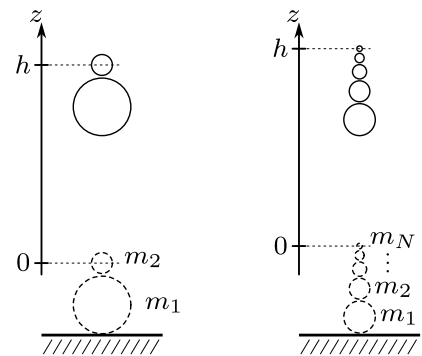
**б)** Определете на каква височина  $H$  ще се издигне леката топка. Отговора изразете чрез  $h, m_1, m_2$ . (1 т.)

**в)** Намерете височината  $H$  в частния случай  $m_1 \gg m_2$ . (0.5 т.)

Нека имаме  $N$  топки с маси  $m_1 > \dots > m_N$ , поставени една върху друга, както е показано на чертежа. Те са издигнати на височина  $h$ .

**г)** Определете теоретичната максимална височина  $H_{\max}$ , на която може да се издигне най-леката топка за  $N = 3$ . (2 т.)

**д)** Определете теоретичната максимална височина  $H_{\max}$ , на която може да се издигне най-леката топка за произволно  $N$ . (2.5 т.)



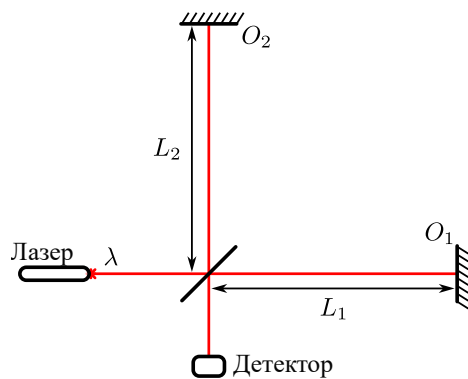
Фигура 1: Начално положение на топките

**Зад. 2 Laser Interferometer Gravitational-Wave Observatory (LIGO) (10 т.)**

Гравитационните вълни са деформации на самото пространство(време), разпространяващи се със скоростта на светлината  $c = 3 \cdot 10^8$  m/s. Те са предсказани още през 1916 г. от А. Айнщайн, а близо 100 години по-късно бе обявена първата детекция на гравитационна вълна от гравитационновълновата обсерватория LIGO Livingston. В близкото бъдеще се очаква гравитационновълновата астрономия да заеме едно централно място в наблюдателната астрономия и да бъде източник на много нова и съществена информация за това как работи пространството-времето.

В тази задача ще се запознаете с основите на това как работят днешните детектори на гравитационни вълни и как принципно се извлича информация от засечените вълни.

Детекторите LIGO на практика представляват интерферометър на Майкелсон с две рамена с дължини  $L_0 = 4$  km (фиг. 1, вж. Допълнението в края на тази задача). Използва се лазерен източник на кохерентна монохроматична светлина с дължина на вълната  $\lambda = 1064$  nm. Положението на огледалата е такова, че лъчите от двете рамена интерферират деструктивно, т.е. детекторът отчита интензитет 0 в



Фигура 1: LIGO

изходно положение (т.е. в отсъствие на гравитационни вълни). Когато гравитационна вълна премине през детектора, дължините на двете рамена се променят като

$$L_1 = L_0 \left( 1 + \frac{h(t)}{2} \right) \quad L_2 = L_0 \left( 1 - \frac{h(t)}{2} \right)$$

където  $L_{1,2}$  са дължините на двете рамена, а безразмерната величина  $h(t)$  е т.нар. деформация на вълната (относителната деформация на пространството) в момент  $t$ . В резултат се получава ненулев светлинен интензитет, попадащ върху детектора. Така показанията на детектора дават възможност за определянето на  $h(t)$ . От своя страна, от получената информация за  $h(t)$  може да се получи много информация за обектите, които са създали гравитационната вълна.

**а)** Каква е минималната стойност на разликата  $\Delta L_0$  в дължината на двете рамена в изходно положение, такава че двата лъча да интерферират изцяло деструктивно? Отговора изразете чрез  $\lambda$  и пресметнете числената му стойност. **(1.5 т.)**

Когато 2 кохерентни лъча с дължина на вълната  $\lambda$ , интензитет  $I_0$  и разлика в изминатите оптични пътища  $\Delta s$  интерферират се получава лъч с интензитет  $I$ , който се задава от

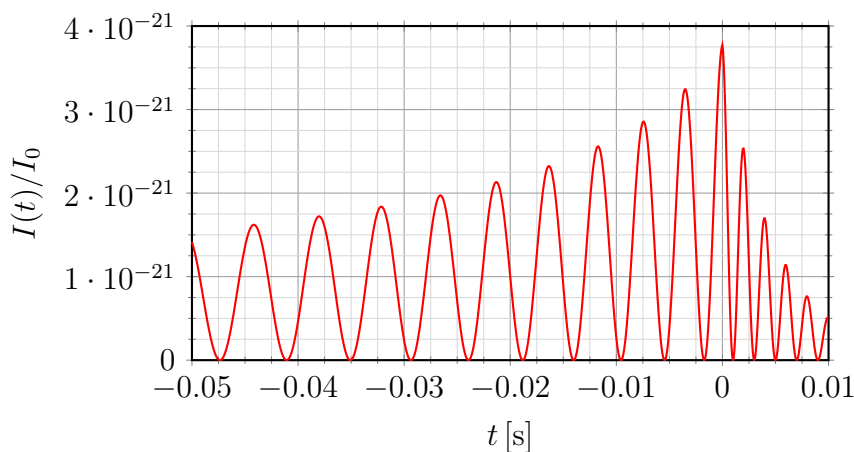
$$I = 4I_0 \cos^2 \left( \frac{\pi \Delta s}{\lambda} \right)$$

**б)** Определете интензитета  $I(t)$  на засечената от детектора светлина при деформация на гравитационната вълна  $h(t)$ . Отговора изразете чрез  $h(t)$ ,  $I_0$ ,  $L_0$ ,  $\lambda$ . **(2 т.)**

**в)** Покажете, че при малки деформации на гравитационните вълни, т.е.  $h(t) \ll 1$ , е приложимо приближението

$$I(t) \approx Ch^2(t)$$

където  $C$  е константа. Изразете  $C$  чрез  $I_0$ ,  $L_0$ ,  $\lambda$ . **(0.5 т.)**



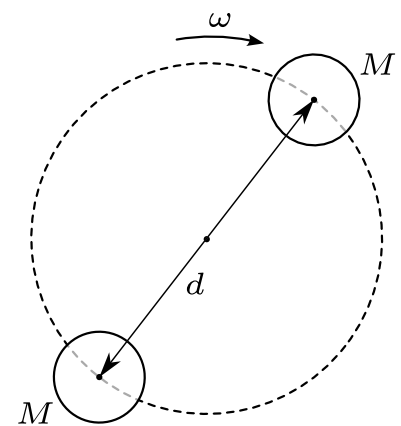
Фигура 2: Показания на детектора, нормирани към интензитета на един от лъчите

На фиг. 2 е представена графика на интензитета, засечен от детектора при гравитационни вълни, получени при сливане на две черни дупки.

**г)** Определете максималното удължаване  $\delta L_{\max}$  на едно от рамената. Отговора представете с точност до 1 значеща цифра в единици  $r_p \approx 0.84 \cdot 10^{-15} \text{ m}$  (радиус на протона). **(2 т.)**

*Подсказка:* От графиката можете да определите максималната деформация  $h_{\max}$  за засечената гравитационна вълна, откъдето може да определите и  $\delta L_{\max}$ .

Ще моделираме черните дупки като две кълба с равни маси  $M$  и равни радиуси  $R = 2GM/c^2$ , които обикалят по кръгови орбити около общия си център на масите (фиг. 3). Приемете, че



Фигура 3: Модел на система от две черни дупки

законите на класическата механика са приложими и че законът на Нютон за гравитацията е валиден. Универсалната гравитационна константа е  $G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{N}\cdot\text{m}^2}{\text{kg}^2}$ .

д) Нека центровете на двете черни дупки са на разстояние  $d$  един от друг. Намерете честотата  $f$ , с която се въртят двете черни дупки. Отговора изразете чрез  $c, R, d$ . **(2.5 т.)**

*Подсказка:* Честотата на въртене на черните дупки  $f = 1/T$ , където  $T$  е времето, за което една от черните дупки извършва една пълна обиколка.

е) Моментът на сливане на черните дупки настъпва, когато те се допират, т.е.  $d = 2R$ . Честотата на въртене в този момент, определена от сигнала, получен от LIGO, е  $f = 75\text{Hz}$ . Определете масата  $M$  на черните дупки изразена чрез  $G, c, f$  и пресметнете числената и стойност в единици слънчеви маси  $M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$ . **(1.5 т.)**

*Допълнение:* Интерферометърът на Майкелсон се състои от лазерен източник (лазер), полупрозрачно огледало ( $M$ ), две огледала ( $O_1, O_2$ ), разположени в краищата на двете рамена, и детектор. Полупрозрачното огледало  $M$  разделя лазерния лъч на два еднакво интензивни лъча, които се отразяват от огледалата в краищата на рамената и се връщат обратно към полупрозрачното огледало, с помощта на което се събират при детектора, където се наблюдава двулъчева интерференция на тези два лъча.

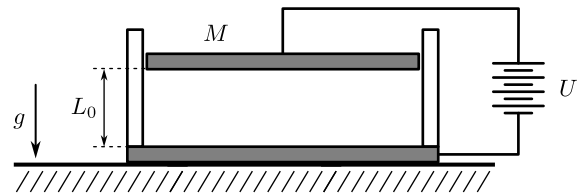
*Полезна математика:* При малки стойности на  $x$ , т.е.  $x \ll 1$  е изпълнено  $\sin(x) \approx x$ .

### Зад. 3 Кондензатор с газ (10 т.)

Плосък кондензатор има пластини с площ  $S$  и разстояние между тях  $d \ll \sqrt{S}$ . Кондензаторът е зареден до напрежение  $U$ .

а) Намерете силата на привличане  $F$  между пластините на кондензатора. Отговора изразете чрез  $U, S, d$  и диелектричната проницаемост на вакуума  $\epsilon_0$ . **(2 т.)**

Вертикален цилиндър с напречно сечение с площ  $S$  има метална основа и околна повърхност от електрически непроводящ материал. В цилиндъра херметически е затворен едноатомен идеален газ с помощта на метално бутало с маса  $M$ , което може да се движи без триене. В началния момент буталото е в равновесие на малко разстояние  $L_0 \ll \sqrt{S}$  от дъното. Приемете външното налягане за 0.



Фигура 1: Кондензатор с газ

В някакъв момент дъното и буталото са свързани към източник на постоянно напрежение  $U$  през резистор  $R$ . Съпротивлението  $R$  е толкова голямо, че кондензаторът се зарежда много бавно и газът има достатъчно време да обменя колкото топлина е нужно с околната среда.

б) Намерете новото разстояние  $L$  между буталото и дъното, когато след достатъчно дълго време системата достигне равновесие. Отговора изразете чрез  $U, S, L_0, M, \epsilon_0$  и земното ускорение  $g$ . **(3.5 т.)**

в) Какво е максималното напрежение  $U_{\max}$ , за което е възможно равновесие? Отговора изразете чрез  $S, L_0, M, \epsilon_0$  и  $g$ . **(1 т.)**

Нека приложеното напрежение  $U$  бъде  $U = \sqrt{\frac{3MgL_0^2}{8\epsilon_0 S}}$ . След постигане на равновесие, кондензаторът е разкачен от източника на напрежение. Буталото е леко преместено и освободено, при което системата започва да трепти.

г) Определете периода на трептене  $T$  на буталото и го изразете чрез  $U, S, L_0, M, \epsilon_0, g$ . Приемете, че трептенията са достатъчно бързи, че газът на практика да не обменя топлина с околната среда. **(3.5 т.)**

*Забележка:* Приемете, че газът е достатъчно разреден, така че  $\epsilon_r \approx 1$ .

*Полезна математика:* При малки стойности на  $x$ , т.е.  $x \ll 1$ , е изпълнено  $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$ .