МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика, София, 6-8 март 2026 г.

Решения на темата за пета състезателна група (11. клас)

Задача 1. Механична предавка

а) Нека m_1 и m_2 са съответно масата на горния и на долния цилиндър. Тъй като цилиндрите имат обща ос, общият им инерчен момент е:

(1) $$I = \frac{1}{2}m_1R^2 + \frac{1}{2}m_2(2R)^2 = \frac{1}{2}(m_1 + 4m_2)R^2.$$ **(0.5 т)**

Понеже двата цилиндъра са изработени от еднакъв материал, техните маси са пропорционални на съответните им обеми:

(2) $m_1/m_2 = V_1/V_2$ или еквивалентно $m_1 = \rho V_1; m_2 = \rho V_2$. **(0.5 т)**

където ρ е плътността на материала. Като вземем предвид, че:

(3) $V_1 = \pi R^2 h$ и $V_2 = \pi(2R)^2 h$,

намираме:

(4) $$m_1/m_2 = 1/4,$$

откъдето следва:

(5) $$m_1 = m_0/5$$ **(0.5 т)**

(6) $$m_2 = 4m_0/5,$$ **(0.5 т)**

където m_0 е общата маса на детайла. Така, за общия инерчен момент на тялото получаваме:

(7) $$I = \frac{17}{10}m_0R^2.$$ **(0.5 т)**

б) Ясно е, че макарите се въртят в противоположна посока. Затова, ако едната теглилка се спуска, другата се изкачва. Предполагаме, че се спуска теглилката 1. Ако предположението ни не е вярно, ще получим съответното ѝ ускорение отрицателно. Проектираме действащите върху дадена теглилка сили в посоката, в която се движи съответната макара. От II принцип на механиката следва:

(8) $$ma_1 = mg - T_1$$ **(0.5 т)**

(9) $$ma_2 = T_2 - mg$$ **(0.5 т)**

Прилагаме уравнението за въртене на твърдо тяло около постоянна ос за всяка от макарите:

(10) $$I\epsilon_1 = 2RT_1 - 2Rf$$ **(0.5 т)**

(11) $$I\epsilon_2 = 2Rf - RT_2$$ **(0.5 т)**

където ϵ_1 и ϵ_2 са съответните ъглови ускорения на макарите, а f е големината на силата на триене в точката на допиране на макарите.

Тъй като макарите не се хлъзгат една спрямо друга, във всеки момент допиращите се точки от периферията се движат с еднаква линейна скорост v. Понеже макарите имат еднакъв радиус, равни са и ъгловите им скорости, и ъгловите им ускорения:

(12) $$\omega_1 = \omega_2 = \omega$$ **(0.5 т)**

(13) $$\epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon.$$ **(0.5 т)**

Ускоренията на двете теглилки са свързани с ъгловото ускорение на макарите, както следва:

(14) $$a_1 = 2R\epsilon$$ **(0.5 т)**

(15) $$a_2 = R\epsilon$$ **(0.5 т)**

След алгебрични преобразования намираме ъгловото ускорение:

(16) $$\epsilon = \frac{mgR}{2I + 5mR^2}$$

и получаваме окончателните изрази за двете ускорения:

(17) $$a_1 = \frac{2mgR^2}{2I + 5mR^2}$$ **(0.5 т)**

(18) $$a_2 = \frac{mgR^2}{2I + 5mR^2}$$ **(0.5 т)**

Алтернативно решение на подточка б) – енергетичен подход. За дадено време t макарите се завъртат на еднакъв ъгъл φ. Съответно първата теглилка се спуска на разстояние $h_1 = \varphi(2R)$, а втората – се изкачва на $h_2 = \varphi R$. Следователно работата на силата на тежестта е:

$$A_G = mgh_1 - mgh_2 = mgR\varphi.$$ **(1.0 т)**

В дадения момент двете макари се въртят с еднаква моментна ъглова скорост ω. Следователно скоростите на двете теглилки са съответно $v_1 = \omega(2R)$ и $v_2 = \omega R$. Кинетичната енергия на системата в този момент е:

$$E_{\text{к}} = 1/2\ mv_1^2 + 1/2\ mv_2^2 + 1/2\, I\omega^2 + 1/2\, I\omega^2 = (2I + 5mR^2)\omega^2/2$$ **(1.0 т)**

Тъй като макарите не се хлъзгат една спрямо друга, между тях действа сила на триене в покой, която не върши работа. Следователно $E_{\text{к}} = A_G$, откъдето получаваме:

$$mgR\varphi = (2I + 5mR^2)\omega^2/2$$ **(1.0 т)**

При въртене с постоянно ъглово ускорение $\varphi = \epsilon t^2/2$ **(0.5 т)** и $\omega = \epsilon t$ **(0.5 т)**, откъдето определяме:

$$\epsilon = \frac{mgR}{2I + 5mR^2}$$

и съответно:

$$a_1 = \epsilon(2R) = \frac{2mgR^2}{2I + 5mR^2}$$ **(0.5 т)**

$$a_2 = \epsilon R = \frac{mgR^2}{2I + 5mR^2}$$ **(0.5 т)**

в) В този случай $a_2 = 0$, $\epsilon_2 = 0$ и от уравненията (9) и (11) следва:

(19) $$T_2 = mg$$ **(0.5 т)**

(20) $$f = T_2/2 = mg/2$$ **(0.5 т)**

Тогава уравненията (8) и (10) приемат вида:

(21) $$ma_1 = mg - T_1$$ **(0.5 т)**

(22) $$I\epsilon_1 = 2RT_1 - Rmg$$ **(0.5 т)**

Като вземем предвид, че $a_1 = \epsilon_1 R$, намираме:

(23) $$a_1 = \frac{mgR^2}{I + 2mR^2}$$ **(0.5 т)**

Важно уточнение. В този случай енергетичният подход не може да бъде приложен, защото поради хлъзгането на макарите една спрямо друга силите на триене вършат ненулева работа и механичната енергия не се запазва.

Задача 2. Планетарен кондензатор

а) Интензитетът на полето във вътрешността на заредена сфера е нула. Затова земното електрично поле се дължи изцяло на отрицателните заряди върху земната повърхност и е еквивалентно на полето на отрицателен заряд $-Q$ в центъра на Земята. Следователно интензитетът на полето е насочен към центъра на Земята **(1.0 т)** и големината му е:

(1) $$E = kQ/R^2.$$ **(1.0 т)**

Следователно:

(2) $$Q = ER^2/k \approx 9{,}1 \cdot 10^5 \text{ C}.$$ **(1.0 т)**

(0.5 точки за израз и 0.5 точки за числена стойност)

Алтернативно, може да се подходи по следния начин. Интензитетът на електрично поле над проводяща повърхност е перпендикулярен повърхността. Следователно $\vec{E}$ е перпендикулярен на земната повърхност и сочи към центъра на Земята, защото зарядът ѝ е отрицателен. **(1.0 т)** Големината на интензитета над проводящата повърхност е:

(1') $$E = \sigma/\epsilon_0,$$ **(0.5 т)**

където:

(1") $$\sigma = Q/(4\pi R^2)$$ **(0.5 т)**

е повърхнинната плътност на електричните заряди по земната повърхност. Оттук, като изразим Q, получаваме еквивалентен резултат:

(2') $$Q = 4\pi\epsilon_0 E R^2 \equiv ER^2/k \approx 9{,}1 \cdot 10^5 \text{ C}.$$ **(1.0 т)**

б) Понеже земното електрично поле се дължи единствено на зарядите върху земната повърхност, потенциалът на височина H, т.е. на разстояние $r = R + H$ от центъра на Земята е:

(3) $$\varphi_1 = -kQ/r = -kQ/(R + H)$$ **(1.0 т)**

Съответно потенциалът върху земната повърхност е:

(4) $$\varphi_2 = -kQ/R.$$ **(1.0 т)**

Следователно напрежението между йоносферата и Земята е:

(5) $$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \frac{kQH}{R(R + H)}.$$ **(1.0 т)**

От определението за капацитет получаваме:

(6) $$C = \frac{Q}{U} = \frac{R(R + H)}{kH} \left(\equiv \frac{4\pi\epsilon_0 R(R + H)}{H} \right) \approx 2{,}34 \cdot 10^{-2} \text{ F}.$$ **(1.0 т)**

(0.5 точки за израз и 0.5 точки за числена стойност)

Алтернативно ***непълно*** *решение. Точките за това решение са по-малко от пълното (точно) решение*!

Ако приемем, че полето между йоносферата и Земята е приблизително еднородно, напрежението между тях е:

(5') $$U \approx EH.$$ **(1.0 т)**

Като вземем предвид уравнение (2), намираме:

(6') $$C = \frac{Q}{U} \approx \frac{R^2}{kH} \left(\equiv \frac{4\pi\epsilon_0 R^2}{H} \right) \approx 2{,}27 \cdot 10^{-2} \text{ F}.$$ **(1.0 т)**

И двата числени отговора се приемат за верни, защото се закръглят към $2{,}3 \cdot 10^{-2}$ F. Този подход е еквивалентен на приближение, в което сферичният кондензатор се разглежда като плосък с площ на плочите $S \approx 4\pi R^2$ и разстояние $d = H$ между тях. Тогава, ако се приложи формулата $C = \epsilon_0 S/d$, се получава приблизителният израз (6').

в) Известно е, че енергията на зареден кондензатор е $W = CU^2/2$. Като се вземе предвид, че $U = Q/C$, намираме:

(7) $$W = \frac{Q^2}{2C} = 1{,}8 \cdot 10^{13}\ \text{J}.$$ **(1.0 т)**

(0.5 точки за израз и 0.5 точки за числена стойност)

г) Годишното потребление на енергия, изразено в джаули, е:

(8) $$E = 3 \cdot 10^4\ \text{TWh} = 3 \cdot 10^4 \cdot 10^{12}\ \text{W} \cdot 3600\ \text{s} \approx 1{,}1 \cdot 10^{20}\ \text{J}$$ **(1.0 т)**

Следователно времето, за което би стигнала атмосферната енергия, е:

(9) $$t = W/E \approx 1{,}6 \cdot 10^{-7}\text{години} = 5{,}84 \cdot 10^{-5}\ \text{дни} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \text{часа} = 5\ \text{s}.$$ **(1.0 т)**

Точките за уравнение (9) се дават само ако крайният отговор е изразен в секунди.

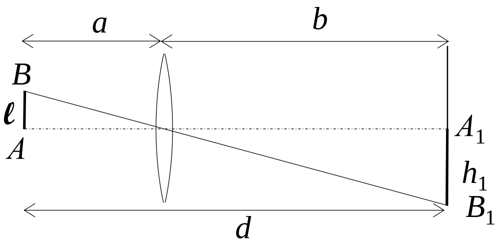
Задача 3. Оптичен експеримент

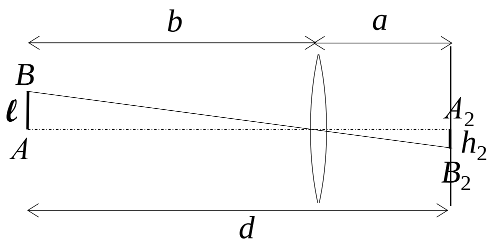
а) На фигурите е показано положението на лещата при формиране на двата образа и е проследен ходът на лъча, който минава през оптичния център на лещата. Нека a е разстоянието между жичката и лещата, при което за първи път върху екрана се наблюдава образ. Тогава за разстоянието b от лещата до екрана е в сила:

(1) $$a + b = d$$ **(0.5 т)**

(2) $$1/a + 1/b = 1/f$$ **(0.5 т)**

Вторият образ се наблюдава в момента, когато лещата се отдалечи на разстояние b от жичката, като съответно разстоянието от лещата до екрана е a. **(1.0 т)**





(0.5 т) **(0.5 т)**

Точките за всеки от чертежите се дават, ако ясно личат следните елементи:

- лъчът, минаващ през оптичния център на лещата без пречупване;
- $a < b$;
- $h_1 > \ell$ и $h_2 < \ell$.

Ог чертежа се вижда, че линейното увеличение (по модул) на образа в първия случай е:

(3) $$M_1 = h_1/\ell = b/a,$$ **(0.5 т)**

а във втория случай:

(4) $$M_2 = h_2/\ell = a/b.$$ **(0.5 т)**

Ако умножим почленно уравненията (3) и (4), получаваме $h_1 h_2/\ell^2 = 1$, откъдето намираме дължината на жичката:

(5) $$\ell = \sqrt{h_1 h_2} = 8{,}0\ \text{mm}.$$ **(1.0 т)**

б) От уравнение (3) или (4) изразяваме линейното увеличение за един от образите:

(6) $$M_1 = b/a = \sqrt{h_1/h_2} \text{ или еквивалентно } b = a\sqrt{h_1/h_2}$$ **(0.5 т)**

Заместваме b в уравнение (1) и намираме разстоянието a:

(7) $$a = \frac{d\sqrt{h_2}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}$$ **(0.5 т)**

и от уравнение (6) изразяваме b:

(8) $$b = \frac{d\sqrt{h_1}}{\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}}$$ **(0.5 т)**

От уравнение (2) на тънката леща, изразяваме търсеното фокусно разстояние:

(9) $$f = \frac{ab}{a+b} = \frac{d\sqrt{h_1 h_2}}{\left(\sqrt{h_1} + \sqrt{h_2}\right)^2} = \frac{d\ell}{h_1 + h_2 + 2\ell} \approx 22{,}2\ \text{cm}.$$ **(1.0 т)**

в) От условията (1) и (2) следва, че a и b са двата корена на уравнението:

(10) $$x^2 - dx + df = 0.$$ **(1.0 т)**

За да има реални корени уравнението, е нужно дискриминантата да бъде неотрицателна:

(11) $$D = d^2 - 4df \geq 0.$$ **(0.5 т)**

Минималното разстояние, при което е изпълнено това условие, е:

(12) $$d_{\min} = 4f \approx 88{,}8\ \text{cm}.$$ **(1.0 т)**

В този случай уравнението има два съвпадащи корена $a = b = 2f$, т.е. лещата трябва да се намира по средата между лампата и екрана. Съответно върху екрана се наблюдава действителен обърнат образ на жичката с размер, равен на дължината на жичката.