МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
7 – 9 ноември 2025 г., гр. София
Решения на темата за VII състезателна група
(Специална тема)

Задача 1. Електростатика

Част 1: Равновесие в статични полета **[4,9 т.]**

а) Да разгледаме заряд q поставен във външно електростатично поле $\vec{E}$, който се намира в устойчиво равновесие в някаква точка, която без ограничение на общността можем да приемем за начало на координатната система. Това значи, че произволно малко отклонение на заряда води до появата на връщаща сила $q\vec{E}$ – сила, сочеща обратно към началото (равновесната точка), т.е. $q\vec{E} \cdot \vec{e}_r < 0$. **[0,4 т.]** Нека без ограничение на общността приемем, че $q > 0$ и тогава $\vec{E} \cdot \vec{e}_r = E_r < 0$.

Нека разгледаме малка сфера с център началото на координатната система. Понеже всяка точка от повърхността ѝ може да се счита за близка до началото, то по повърхността на сферата $E_r < 0$. Следователно потокът на електричното поле през тази сфера е $\Phi_E < 0$. **[0,5 т.]** Тогава от закона на Гаус следва, че в тази сфера има затворен ненулев заряд. Това е противоречие! **[0,4 т.]** Следователно, няма електростатично поле, в което да може да се постави заряд в устойчиво равновесие.

б) Реформулировка на горния резултат гласи, че електростатичният потенциал няма локални екстремуми. Например, ако имаше локален минимум, то потенциалната енергия на положителен заряд би имала минимум в същата точка, което е еквивалентно на устойчиво равновесие, а това противоречи на доказаната теорема. **[0,4 т.]**

Нека предположим, че диполът има диполен момент $\vec{p} = p\hat{p}$ и се намира в точка с радиус-вектор $\vec{r}$. Нека външното електростатично поле е създадено от заряди q_i, разположени в точки с радиус-вектори $\vec{r}_i$. Тогава потенциалната енергия е **[0,3т.]**:

$$W = -\vec{p} \cdot \vec{E} = -(p\hat{p}) \cdot \left(\sum_i \frac{kq_i(\vec{r} - \vec{r}_i)}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3} \right) = \sum_i -(q_i\hat{p}) \cdot \frac{k(-p)(\vec{r}_i - \vec{r})}{|\vec{r} - \vec{r}_i|^3}$$

Вторият вид на W има вид на потенциалната енергия на заряд с големина $-p$ в точка с радиус-вектор $\vec{r}$, поставен в поле, създадено от диполи с моменти $\vec{p}_i = q_i\hat{p}$, намиращи се в точки с радиус-вектори $\vec{r}_i$. **[0,5 т.]** По теоремата на Ирншоу, този фиктивен заряд $-p$ няма как да е в устойчиво равновесие и следователно потенциалната му енергия няма екстремуми, т.е. W няма екстремуми. Но W е потенциалната енергия на дипол с фиксирана ориентация във външно поле. Следователно такъв дипол не може да е в равновесие във външно електрично поле. **[0,4 т.]**

в) Нека диелектричното тяло се намира в поле на заряд q, поставен в началото на координатната система. Ако частицата има радиус-вектор $\vec{r}$, то $\vec{p} = \alpha\vec{E} = \alpha E(r)\vec{e}_r$. Силата, с която зарядът действа на частицата е $\vec{F} = p\frac{dE}{dr}\,\vec{e}_r = \alpha EE'\vec{e}_r$. **[0,2 т.]** Тогава при радиално преместване с dr се извършва работа $dA = \vec{F} \cdot \vec{e}_r dr = \alpha EE' dr = d\left(\frac{1}{2}\alpha E^2\right)$, откъдето $dW = -dA = d\left(-\frac{1}{2}\alpha E^2\right) \Rightarrow W = -\frac{1}{2}\alpha E^2$. **[0,2 т.]**

(**[0,3 т.]** за идеята да се разгледа някакво просто нехомогенно поле)

г) Това, че теоремата на Ирншоу важи и за малки диелектрични тела, означава, че за електростатични полета $W = -\frac{1}{2}\alpha E^2$ няма локални минимуми. За диелектрици е вярно, че $\alpha = \beta\varepsilon_0\chi > 0$. Тогава, тази формулировка на теоремата на Ирншоу е еквивалентна на твърдението, че E^2 няма локални максимуми. **[0.4 т.]**

Известно е, че магнитостатичните и електростатичните полета удовлетворяват еднакви закони (уравненията на Максуел се свеждат до уравнения за нулев поток (Гаус) и нулева циркулация на полетата). Ето защо следва, че и B^2 няма максимуми за магнитостатични полета. **[0.4 т.]**

За малка частица от магнитен материал следва да има аналогична формула за потнециалната енергия, а именно $W_m = -\frac{1}{2}\alpha_m B^2$, където B е магнитната индукция на магнитостатичното поле, $\alpha_m = \frac{\beta}{\mu_0\chi_m}$, където χ_m е магнитната възприемчивост на материала. Оттук виждаме, че ако $\chi_m < 0$, частицата би се намирала в устойчиво равновесие в точка с минимум на B^2, т.е. в точка с $B = 0$. Пример за такава точка е средата между два колинеарни магнитни дипола с противоположна ориентация. **[0.5 т.]**

Т.е. магнитната левитация е възможна за диамагнитни материали ($\chi_m < 0$).

Допълнение: Водата е добър диамагнит, което прави възможно магнитната левитация на живата материя. Това е направено в прочутия експеримент с левитиращата жаба.

Част 2: Трептения **[5,1 т.]**

д) Електростатичният потенциал по оста на пръстена е $\varphi = \frac{kq}{\sqrt{R^2+z^2}}$. Тогава $E_z(z) = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$, т.е. $E_z(z) = \frac{kqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}$. Заради симетрията на задачата, по оста z интензитетът на полето ще бъде насочен по z. Тогава $\vec{E}(0,z) = \frac{kqz}{(R^2+z^2)^{3/2}}\vec{e}_z$. **[0.3 т.]**

В близост до центъра, т.е. при $z \ll R$ имаме $\vec{E}(0,z) \approx \frac{kq}{R^3} z\vec{e}_z$. Да разгледаме малък цилиндър с височина z и радиус r, чиято ос съвпада с оста на пръстена и чиято долна основа лежи в равнината на пръстена. Прилагаме закона на Гаус:

$$\Phi_E = E(0,z)(\pi r^2) + E_r(r,0)(2\pi r z) = 0 \Rightarrow E_r(r,0) = -\frac{kq}{2R^3} r$$

[0.3 т.] Така финално се получава $\vec{E}(r,z) = \frac{kq}{2R^3}(2\vec{z} - \vec{r}) = \left(-\frac{kqr}{2R^3}, 0, \frac{kqz}{R^3}\right)$. **[0.1 т.]**

(**[0.3 т.]** за идеята да се ползва закон на Гаус**)**

е) Силата, действаща на заряда е $\vec{F} = \left(-\frac{kq^2 r}{2R^3}, 0, \frac{kq^2 z}{R^3}\right)$. Оттук се вижда, че отклонение в радиално направление предизвиква връщаща сила, пропорционална на отместването, а отклонение по оста на пръстена, води до сила, която се стреми да увеличи отклонението. Т.е. трептения ще възникнат при радиални отклонения и очевидно равновесието е неустойчиво, понеже отклонение по оста на пръстена не поражда връщаща сила. **[0,2 т.]**

При отклонение в радиално направление се поражда сила, отговаряща на закона на Хук с твърдост на еквивалентната пружина $k_{eff} = \frac{kq^2}{2R^3}$. Тогава периодът на тези колебания е **[0,3 т.]**:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eff}}} = 2\pi\sqrt{\frac{2mR^3}{kq^2}}$$

ж) Ясно е, че заради симетрията, интензитетът на полето по оста x е изцяло вертикално, т.е. нормално на двете плочи. **[0,2 т.]**

Да разгледаме заряди, разпределени равномерно върху плоска фигура S с плътност σ. Тогава нормалната компонента на интензитета на полето в някаква точка е

$$E_n = \int_S \frac{kdq}{r^2}\hat{r}\cdot\hat{n} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{\hat{r}\cdot\overrightarrow{dS}}{r^2} = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\int_S \frac{dS_r}{r^2} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\frac{\Omega}{4\pi}$$

където Ω е телесният ъгъл, под който се вижда плоската фигура, гледано от точката, а $\Omega/4\pi$ има смисъл на частта от пространството, която заема тази фигура, гледано от точката.

В нашия случай, за едната плоча $\Omega/4\pi = \theta/2\pi$, където θ е ъгълът, под който се вижда плочата. Като се отчете равният принос и от другата плоча се получава:

$$E_y = \frac{\sigma\theta}{\pi\varepsilon_0} = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left[\pi - \arctan\frac{\frac{d}{2}}{\frac{l}{2}-x} - \arctan\frac{\frac{d}{2}}{\frac{l}{2}+x}\right]$$

$$\Rightarrow E(x) = E_y(x) = \frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\left[\pi - \left(\arctan\frac{d}{l-2x} + \arctan\frac{d}{l+2x}\right)\right]$$

[0,9 т.] Тогава, енергията на диелектричното тяло е

$$E_p = -\frac{1}{2}\alpha E^2 = -\frac{\alpha\sigma^2}{2\pi^2\varepsilon_0^2}\theta^2(x)$$

Около $x = 0$ имаме:

$$\theta^2(x) \approx \theta^2(0) + \left(\frac{d\theta^2}{dx}\right)_{x=0} x + \frac{1}{2}\left(\frac{d^2(\theta^2)}{dx^2}\right)_{x=0} x^2$$

$$\theta^2(x) \approx \theta^2(0) + 2\theta(0)\theta'(0)x + \left(\theta'^2(0) + \theta(0)\theta''(0)\right)x^2$$

С отчитане на $d \ll l$, директно се получава, че

$$\theta(0) = \pi - 2\arctan\frac{d}{l} \approx \pi - \frac{2d}{l} \qquad \theta'(0) = 0 \qquad \theta''(0) = \frac{16dl}{(d^2+l^2)^2} \approx \frac{16d}{l^3}$$

$$\Rightarrow \theta^2(x) \approx \pi^2 - \frac{4\pi d}{l} - \frac{16\pi d}{l^3}x^2 \Rightarrow E_p \approx E_{p0} + \frac{8\alpha d\sigma^2}{\pi\varepsilon_0^2 l^3}x^2 = E_{p0} + \frac{1}{2}k_{eff}x^2$$

[0,4 т.] Където $k_{eff} = \frac{16\alpha d\sigma^2}{\pi\varepsilon_0^2 l^3}$. Така, за периодът се получава **[0,3 т.]**:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{eff}}} = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi\varepsilon_0^2 m l^3}{\alpha\sigma^2 d}}$$

з) Силата, действаща на дипола, е $F = -E_p'\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{\alpha\sigma^2}{\pi^2\varepsilon_0^2}\theta\left(\frac{l}{2}\right)\theta'\left(\frac{l}{2}\right)$. **[0,2 т.]** Директно изчисление дава **[0,3 т.]**

$$\theta\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{d}{2l} \approx \frac{\pi}{2}$$

$$\theta'(x) = -\frac{16dlx}{(d^2+(l-2x)^2)(d^2+(l+2x)^2)} \Rightarrow \theta'\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{8dl^2}{d^2(4l^2+d^2)} \approx -\frac{2}{d}$$

$$\Rightarrow F = -\frac{\alpha\sigma^2}{\pi\varepsilon_0^2 d}$$

и) От закона за запазване на енергията следва:

$$0 + E_p\left(\frac{l}{2}\right) = \frac{1}{2}mv^2 + E_p(x) \Rightarrow v = -\sqrt{\frac{2}{m}\left(E_p\left(\frac{l}{2}\right) - E_p(x)\right)}$$

Оттук, за периода се получава:

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{\sigma}{\pi\varepsilon_0}\sqrt{\frac{\alpha}{m}}\sqrt{\theta^2(x) - \theta^2\left(\frac{l}{2}\right)} \Rightarrow \int_0^{\frac{T}{4}} dt = \frac{\pi\varepsilon_0}{\sigma}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\theta^2(x) - \theta^2\left(\frac{l}{2}\right)}}$$

$$T = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sigma}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{\theta^2(x) - \theta^2\left(\frac{l}{2}\right)}}$$

(**[0,5 т.]** за идеята и **[0,4 т.]** за техническа част)

В границата на $d \ll l$ за $\theta(x)$ се получава:

$$\lim_{\frac{d}{l}\to 0} \theta(x) = \lim_{\frac{d}{l}\to 0}\left[\pi - \left(\arctan\frac{d/l}{1 - 2x/l} + \arctan\frac{d/l}{1 + 2x/l}\right)\right] = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, x = -\frac{l}{2} \\ \pi, -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \\ \frac{\pi}{2}, x = \frac{l}{2} \end{cases}$$

(**[0,4 т.]** за тази граница)

Следователно $\theta^2(x) - \theta^2\left(\frac{l}{2}\right) = \begin{cases} 0, x = -\frac{l}{2} \\ \frac{3\pi^2}{4}, -\frac{l}{2} < x < \frac{l}{2} \\ 0, x = +\frac{l}{2} \end{cases}$. Така се получава **[0,3 т.]**:

$$T = \frac{4\pi\varepsilon_0}{\sigma}\sqrt{\frac{m}{\alpha}}\int_0^{\frac{l}{2}} \frac{dx}{\sqrt{3\pi^2/4}} = \frac{4\varepsilon_0 l}{\sigma}\sqrt{\frac{m}{3\alpha}}$$

<u>Задача 2.</u> Рентгенови лъчи

<u>Част 1</u>: **[0,7 т.]**

а) Минималната дължина на вълната съответства на максимална енергия на фотона. При спирачното лъчение кинетичната енергия на електрона преминава в енергията на излъчените фотони. В такъв случай най-високата възможна енергия на фотон е равна на кинетичната енергия на ускорения електрон, т.е. $\varepsilon \leq E_к = eU$, където U е ускоряващото напрежение. **[0,4 т.]** Понеже $\varepsilon = \frac{hc}{\lambda}$, то $\lambda \geq \lambda_{min} = \frac{hc}{eU}$. **[0,1 т.]**

Рентгенови лъчи ще се наблюдават при $\lambda_{min} = \frac{hc}{eU} \leq 10$ nm $\Rightarrow U_{min} \approx 125$ V. **[0,1 т.]**

б) Полученото лъчение не е кохерентно, понеже различните електрони излъчват фотони в различни моменти от време. **[0,1 т.]**

<u>Част 2</u>: **[6,3 т.]**

в) Електроните са релативистки, така че се налага използването на уравненията на релативистката механика.

$$\frac{d}{dt}(\gamma m\vec{v}) = -e\vec{v} \times \vec{B} \Rightarrow (\gamma\vec{v}) \cdot \frac{d(\gamma\vec{v})}{dt} = -\frac{e}{m}\gamma\left(\vec{v} \cdot \left(\vec{v} \times \vec{B}\right)\right) = 0 \Rightarrow \frac{d}{dt}(\gamma^2 v^2) = 0$$

[0,3 т.] Оттук следва, че както и в класическата механика, частицата се движи с постоянна скорост и само си променя направлението. В частност, $\gamma = \gamma_0 = const.$ **[0,2 т.]** По компоненти имаме:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{eB_0}{m\gamma_0} v_z \sin(k_u z) = \frac{eB_0}{m\gamma_0}\frac{dz}{dt}\sin(k_u z) \Rightarrow \frac{dv_x}{dz} = \frac{eB_0}{m\gamma_0}\sin(k_u z)$$

$$\Rightarrow v_x(z) = C - \frac{eB_0}{m\gamma_0 k_u}\cos(k_u z)$$

където C е константа. Движението около оста z е осцилиращо, т.е. $C = 0$ и оттам $v_x(z) = -\frac{eB_0}{m\gamma_0 k_u}\cos(k_u z) = -\frac{Kc}{\gamma_0}\cos(k_u z)$. **[0,2 т.]** Скоростта по z можем да изразим от γ_0 и v_x и да преобразуваме имайки предвид $\gamma_0 \gg 1$:

$$\frac{1}{\gamma_0^2} = 1 - \frac{v_x^2 + v_z^2}{c^2} \Rightarrow v_z = c\sqrt{1 - \frac{1 + K^2\cos^2(k_u z)}{\gamma_0^2}} \approx c\left(1 - \frac{1 + K^2\cos^2(k_u z)}{2\gamma_0^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_z(z) = c\left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma_0^2}\right) - \frac{cK^2}{4\gamma_0^2}\cos(2k_u z) \Rightarrow \overline{v_z} = c\left(1 - \frac{1 + K^2/2}{2\gamma_0^2}\right)$$

(**[0,2 т.]** за $v_z(z)$ и **[0,1 т.]** за $\overline{v_z}$)

г) Електроните трептят по оста x и следователно полученото лъчение ще е линейно поляризирано по оста x (хоризонтално линейно поляризиран). **[0,2 т.]**

д) Понеже полученото лъчение е линейно поляризирано по оста x, то тогава $\overrightarrow{E_l} = E(z,t)\vec{e}_x$ и $\overrightarrow{B_l} = \frac{1}{c}E(z,t)\vec{e}_y$. Пълната сила е:

$$\vec{F} = -e\left(\overrightarrow{E_l} + \vec{v} \times \left(\vec{B} + \overrightarrow{B_l}\right)\right) \Rightarrow \begin{vmatrix} F_x = -e(E_l - (B_l + B)v_z) \\ F_z = -e(B + B_l)v_x \end{vmatrix}$$

[0,4 т.] Но $v_z \sim c$ и $E_l \sim E_0 \ll cB_0 \sim cB$, откъдето следва $E_l \ll Bv_z$ и $B_l \ll B$. Това значи, че траекториите на електроните са на практика същите.**[0,4 т.]** Тогава, за мощността имаме:

$$P = \vec{v}\cdot\vec{F} = -e\overrightarrow{E_l}\cdot\vec{v} = -ev_x(z)E(z,t) = \frac{KceE_0}{\gamma}\sin(k_w z - \omega t + \varphi_0)\cos(k_u z)$$

$$\Rightarrow P = \frac{KceE_0}{2\gamma}\left[\sin\left((k_w + k_u)z - \omega t + \varphi_0\right) + \sin\left((k_w - k_u)z - \omega t + \varphi_0\right)\right]$$

$$\Rightarrow P(z,t) = \frac{KceE_0}{2\gamma}[\sin(\theta_+) + \sin(\theta_-)]$$

(**[0,2 т.]** за израза за мощността)

е) Щом $v_z = \frac{dz}{dt} \approx \overline{v_z}$, то $\frac{d\theta_\pm}{dt} \approx (k_w \pm k_u)\overline{v_z} - \omega = \frac{\Delta\theta_\pm}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta_\pm}{\Delta z}\overline{v_z} = const$. Тогава отдадената енергия ΔE за $\Delta z = l$, т.е. за време $\Delta t = l/\overline{v_z}$, е

$$\Delta E = -\int_0^{l/\overline{v_z}} P dt = -\frac{KceE_0}{2\gamma}\left(\int_0^{l/\overline{v_z}} \sin\theta_+\, dt + \int_0^{l/\overline{v_z}} \sin\theta_-\, dt\right)$$

(**[0,4 т.]** за ΔE)

$$-\int_0^{l/\overline{v_z}} \sin\theta_\pm\, dt = -\int_{\theta_{\pm,0}}^{\theta_{\pm,0}+\Delta\theta_\pm} \sin\theta_\pm \frac{dt}{d\theta_\pm/dt} = \frac{\cos\left(\theta_{\pm,0} + \Delta\theta_\pm\right) - \cos\left(\theta_{\pm,0}\right)}{\Delta\theta_\pm}\frac{\Delta z}{\overline{v_z}}$$

(**[0,2 т.]**)

Но $\left\langle\frac{dE}{dz}\right\rangle = \frac{\Delta E}{\Delta z}$.

$$\Rightarrow \left\langle\frac{dE}{dz}\right\rangle = \frac{KceE_0}{2\gamma\overline{v_z}}\left[\frac{\cos\left(\theta_{+,0} + \Delta\theta_+\right) - \cos\left(\theta_{+,0}\right)}{\Delta\theta_+} + \frac{\cos\left(\theta_{-,0} + \Delta\theta_-\right) - \cos\left(\theta_{-,0}\right)}{\Delta\theta_-}\right]$$

(**[0,2 т.]** за отговора)

ж) Ако $\frac{d\theta_\pm}{dt} \approx (k_w \pm k_u)\overline{v_z} - \omega \neq 0$, то за големи разстояния на осредняване l, $\Delta\theta_\pm$ ще става неограничено голямо и средната отделена енергия на единица разстояние ще клони към 0. Това е така, понеже при това условие мощността ще осцилира непрекъснато и съответно няма да има конструктивно натрупване. Ако обаче или $\Delta\theta_+$, или $\Delta\theta_-$ са 0, то единят член в мощността ще бъде постоянен (а не осцилиращ) и ще се натрупва конструктивно. Това води до ненулева средна отдадена енергия и резонансно поведение. **[0,8 т.]** Тогава

$$\Delta\theta_{\pm} = 0 \Rightarrow (k_w \pm k_u)\overline{v_z} = \omega = ck_w \Rightarrow k_w \approx \pm\frac{\overline{v_z}}{c}k_u$$

Оттук е видно, че $\Delta\theta_- \neq 0$ (понеже $k_w > 0$) и следователно $\Delta\theta_+ = 0$, т.е. $\lambda_w = \lambda_r = \frac{\lambda_u}{2\gamma_0^2}\left(1 + \frac{1}{2}K^2\right)$. **[0,2 т.]**

Това значи, че лъченията с дължини на вълните $\lambda_w \neq \lambda_r$ ще бъдат много по-слаби от получилото се лъчение с дължина на вълната λ_r.

з) За константата на ондулатора се получава $K = \frac{eB_0\lambda_u}{2\pi mc} \approx 0.934B_0[\mathrm{T}]\lambda_u[\mathrm{cm}] \approx 8.26$. Оттук $\gamma_0 = \sqrt{\frac{\lambda_u}{2\lambda_r}\left(1 + \frac{1}{2}K^2\right)} \approx 34552$ и съответно за енергията на електроните се получава $(\gamma_0 - 1)mc^2 \approx 17.7\mathrm{GeV}$. Следователно ускоряващото напрежение трябва да бъде от порядъка на $20\mathrm{GV}$! **[0,2 т.]**

и) Понеже сме в резонансния режим, то приносът към мощността на силите от члена с θ_- ще е пренебрежим, заради неконструктивното наслагване с времето. **[0,4 т.]** Така имаме:

$$\frac{d}{dt}(\gamma mc^2) = \frac{KceE_0}{2\gamma}\sin\theta \Rightarrow \frac{d}{dz}(\gamma^2) = \frac{KceE_0}{mc^2}\sin\theta$$

Но $\gamma = \gamma_0(1 + \eta)$ и тогава:

$$\frac{d\eta}{dz} = \frac{KceE_0}{2\gamma_0^2 mc^2}\sin\theta$$

(**[0,2 т.]** за η')

За $\theta = \theta_+$ имаме:

$$\frac{d\theta}{dt} = (k_r + k_u)\overline{v_z} - \omega = \omega\left(\frac{\overline{v_z}(\gamma)}{\overline{v_z}(\gamma_0)} - 1\right) = ck_w\frac{\dfrac{1 + \frac{K^2}{2}}{2\gamma_0^2} - \dfrac{1 + \frac{K^2}{2}}{2\gamma^2}}{1 - \dfrac{1 + \frac{K^2}{2}}{2\gamma_0^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{d\theta}{dz} = \frac{1}{\overline{v_z}(\gamma_0)}\frac{d\theta}{dt} \approx k_u\left(\frac{\overline{v_z}(\gamma_0)}{c}\right)^{-2}\left(1 - \left(\frac{\gamma_0}{\gamma}\right)^2\right) \approx 2k_u\eta$$

(**[0,2 т.]** за θ')

й) Уравненията получени горе

$$\eta = \frac{1}{2k_u}\frac{d\theta}{dz} \qquad\qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{KceE_0}{2\gamma_0^2 mc^2}\sin\theta$$

са аналогични на уравненията за класическо математично махало, където θ, η съответстват съответно на ъгъла на отклонение от равновесното положение и на ъгловата скорост на махалото. **[0,4 т.]** Разликата е, че тук равновесното положение се намира при $\theta = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, следователно $\theta_{bunch} = \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. **[0,1 т.]** И наистина, в началото, при навлизане в ондулатора, електроните са равномерно разпределени и имат $\eta = 0$. С движението през ондулатора, електроните, които не са близо до точките с $\theta = \pi$ започват да се движат към тези точки и така електроните се сгъстяват около $\theta = \pi$. Понеже има дисипативни процеси, които не сме отчели, електроните накрая ще релаксират около равовесните положения с $\theta = \theta_{bunch}$, където остават. Получените сгъстявания образуват тези струпвания – microbunching. **[0,6 т.]**

За разстоянието λ_b се получава:

$$k_b = \frac{2\pi}{\lambda_b} = k_u + k_w \approx k_w \Rightarrow \lambda_b \approx \lambda_w \ll \lambda_u$$

Тоест, на практика тези групички „сърфират“ по полученото лъчение, като изостават с половин период от него. **[0,2 т.]**

Част 3: **[3 т.]**

к) Спонтанно йонизиране можем да очакваме при интензитети на електричното поле, достатъчно големи, че електрон с енергия на свързване енергията на Ридберг, да е на върха на потенциалната бариера **[0,4 т.]**, т.е.

$$U(r) = -\left(\frac{ke^2}{r} + eEr\right) \leq 2\sqrt{\left(\frac{ke^2}{r}\right)(eEr)} = 2\sqrt{ke^3E} \sim E_R$$

$$\Rightarrow E \sim \frac{E_R^2}{4ke^3} \sim \frac{13.6^2}{4 \cdot 9 \cdot 10^9 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \, \frac{\text{V}}{\text{m}} \sim 3 \cdot 10^{10} \, \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E^2 \sim \frac{3 \cdot 10^8 \cdot 8.85 \cdot 10^{-12} \cdot (3 \cdot 10^{10})^2}{2} \sim 10^{18} \, \frac{\text{W}}{\text{m}^2} \sim 10^{14} \, \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

(**[0,1 т.]** за резултата)

л) Понеже векторът на интензитета на електричното поле на нелинейно поляризирана светлина няма едно фиксирано направление, електронът, ускорен от такова поле може въобще да не се върне обратно в начално положение, т.е. може да не се случи рекомбинацията, по време на която фактически се случва излъчването на получения фотон. В резултат, използването на светлина, която не е линейно поляризирана, води до ниска ефективност на процеса на генериране на високи хармоники. **[0,4 т.]**

м) За движението на свободен електрон във външно осцилиращо електрично поле се получава:

$$m\ddot{x} = m\dot{v} = -eE_0 \cos \omega t \Rightarrow v(t) = -\frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t + v_0$$

[0,2 т.] Понеже разглеждаме осцилиращ електрон, който няма дрейф, то $v_0 = 0$

$$\Rightarrow U_p = \left\langle \frac{1}{2} m v^2 \right\rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \langle \sin^2 \omega t \rangle = \frac{e^2 E_0^2}{2m\omega^2} \left\langle \frac{1 - \cos 2\omega t}{2} \right\rangle = \frac{e^2 E_0^2}{4m\omega^2}$$

(**[0,2 т.]** за резултата)

н) Както знаем $\ddot{x}(t) = -\frac{eE_0}{m} \cos \omega t$. Оттук имаме $x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t + v_0 t + x_0$, където v_0, x_0 са интеграционни константи. **[0,1 т.]** Същото може да се съобрази по следния начин.

Ако преминем в неинерциална отправна система, чието начало се движи по закон $x_r(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t$, то в тази система, електронът ще изпитва освен електростатичната сила $-eE_0 \cos \omega t$ и инерчна сила $F_{in} = -m\ddot{x_r} = eE_0 \cos \omega t$. Общата сила е 0 и следователно в тази отправна система тялото се движи равномерно, т.е. $x_{\text{отн}} = x - x_r = v_0 t + x_0$. Така $x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2} \cos \omega t + v_0 t + x_0$.

Нека атомът се йонизира в момент t_0. Тогава имаме, че $x(t_0) = 0$ и $\dot{x}(t_0) = 0$. Така

$$\dot{x}(t_0) = -\frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t_0 + v_0 = 0 \Rightarrow v_0 = \frac{eE_0}{m\omega} \sin \omega t_0$$

$$x(t_0) = \frac{eE_0}{m\omega^2} (\cos \omega t_0 + \omega t_0 \sin \omega t_0) + x_0 = 0$$

$$\Rightarrow x_0 = -\frac{eE_0}{m\omega^2} (\cos \omega t_0 + \omega t_0 \sin \omega t_0)$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{eE_0}{m\omega^2}[\cos\omega t - (\cos\omega t_0 - (\omega t - \omega t_0)\sin\omega t_0)]$$

$$\dot{x}(t) = \frac{eE_0}{m\omega}[\sin\omega t_0 - \sin\omega t]$$

[0,2 т.] Рекомбинация настъпва в момент $t = t'$, когато $x(t') = 0$. Тогава енергията на електрона непосредствено преди рекомбинацията е:

$$E_k = \frac{1}{2}m\big(\dot{x}(t')\big)^2 = \frac{e^2E_0^2}{2m\omega^2}[\sin\omega t_0 - \sin\omega t']^2 = 2[\sin\omega t_0 - \sin\omega t']^2 U_p$$

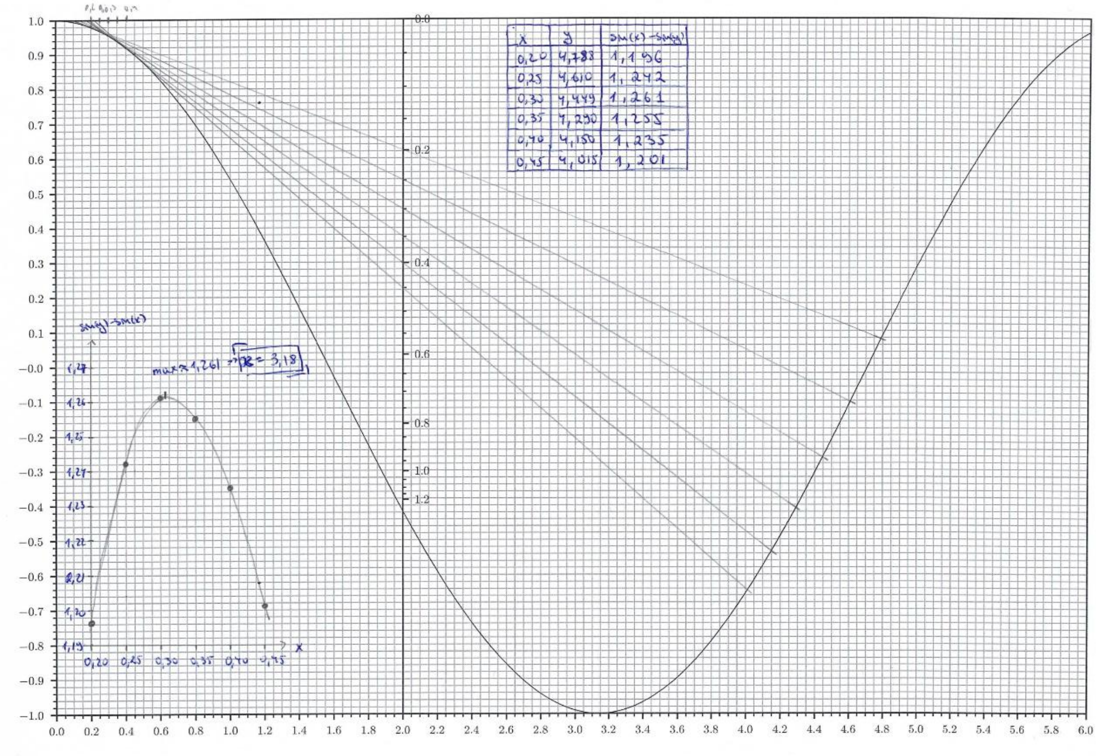
[0,1 т.] Остава да се определи максималната стойност на $|\sin\omega t_0 - \sin\omega t'|$.

Нека $\alpha = \omega t_0$ и $\beta = \omega t' > \alpha$. Тогава $\cos\beta = \cos\alpha - \sin\alpha\,(\beta - \alpha) = f_\alpha(\beta)$, където $f_\alpha(\phi)$ е допирателната към $\cos\phi$ в точката $\phi = \alpha$.

Забелязваме, че $f_\alpha(x = 2) = \cos\alpha + \sin\alpha\,(\alpha - 2)$, а това са координатите y на маркера с надпис α на допълнителната ос на помощната графика. Така можем графично да построим $f_\alpha(x)$ и да определим β и оттам $\sin\alpha - \sin\beta$. **[0,6 т.]**

Лесно се съобразява, че само за $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$, съществува такова β, т.е. само за $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ електронът рекомбинира отново. Също $\sin\alpha - \sin\beta$ интуитивно е мярка за ъгъла между допирателните към косинуса в α и β. На око се определя, че екстремумът на $\sin\alpha - \sin\beta$ се намира някъде при $\alpha \in (0.2, 0.4)$. Правим измервания за $\alpha = 0.200, 0.225, \ldots, 0.400$ и правим таблица за зависимостта на $\sin\alpha - \sin\beta$ от α. Построяваме графика в празното пространство и получаваме, че $\max|\sin\omega t_0 - \sin\omega t'| \approx 1.262 \Rightarrow \kappa \approx 2\cdot(1.262)^2 \approx 3.2$. **[0,4 т.]**

При рекомбинацията електронът преминава от състояние с енергия $E_k = \kappa U_p$ към свързано състояние с енергия $-U_i$. Тогава енергията на фотона е $\varepsilon_\gamma \leq U_i + \kappa U_p$, т.е. $\varepsilon_\gamma \leq U_i + 3.2U_p$. **[0,1 т.]**



о) За улеснение, лесно се получава, че

$$U_p = \frac{e^2E_0^2}{4m\omega^2} = \frac{e^2\left(\frac{2I}{\varepsilon_0 c}\right)}{4m(4\pi^2c^2/\lambda^2)} = \frac{e^2}{8m\pi^2\varepsilon_0 c^3}I\lambda^2 = 9.32\,I\left[10^{14}\,\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{cm}^2}\right](\lambda[\mu\mathrm{m}])^2\ \mathrm{eV}$$

От фигурата се вижда, че $\varepsilon_{\gamma,max} \approx 120$ eV, като $U_i = 15.8$ eV и $\lambda = 0.4$ µm. Тогава:

$$I \approx 7 \cdot 10^{15} \frac{\text{W}}{\text{cm}^2}$$

(**[0,2 т.]** за резултата)

Задача 3. Физика на ядрото

а) От съотношението за неопределеност енергия-време и формулата на Айнщайн, за времето на живот на пиона се получава $\tau \sim \hbar/m_\pi c^2$. За това време, пионът е изминал разстояние не повече от $c\tau \sim \hbar/m_\pi c = \Lambda_\pi$, където Λ_π е Комптъновата дължина на пиона. Понеже остатъчното силно ядрено взаимодействие се осъществява чрез обмен на пион, то радиусът му на действие трябва да е от порядъка на най-голямото изминато от пион разстояние. Така $r_\pi \sim \Lambda_\pi \approx 1.5$ fm.

(**[0,7 т.]** за идеята и **[0,2 т.]** за пресмятането)

б) $\Delta mc^2 = E_{\text{ядро}} - \sum E_{\text{нуклони}} = -E_{\text{св}} \Rightarrow \Delta m = -E_{\text{св}}/c^2$ **[0,3 т.]**

в) Ако ядрото е направено от хомогенна течност с фиксирана плътност, то обемът на ядрото е пропорционален на броя нуклони, т.е. $V \sim A$. С отчитане на $V \sim R^3$ се получава, че $R \sim A^{1/3}$ или $R = r_0 A^{1/3}$ за някакво r_0 **[0,3 т.]**.

Щом $R(A = 210) \approx 7.2$ fm, то за r_0 се получава $r_0 \approx 1.2$ fm. **[0,1 т.]**

г) Обемът, заеман от един нуклон, е $V_1 \sim \frac{4}{3}\pi r_0^3$. В такъв случай, разстоянието между два нуклона е от порядъка на $2r_0 \sim 2.4$ fm. **[0,2 т.]** В същото време радиусът на действие на остатъчното силно ядрено взаимодействие е $r_\pi \sim 1.5$ fm. Това, че двете са от един и същи порядък, означава, че взаимодействието е най-съществено помежду нуклоните, които са преки съседи **[0,6 т.]**.

д) Нуклоните са или вътрешни за капката (A_{int}), или на повърхността (A_S), като очевидно $A = A_{int} + A_S$. Нека енергията на една връзка между 2 нуклона е ε. Всеки от вътрешните нуклони има връзки с някакъв брой n заобикалящи го съседни нуклони. В същото време всеки от нуклоните на повърхността има връзки с $n' < n$ нуклона, понеже са на границата. При този начин на броене на връзките, всяка връзка е преброена 2 пъти и следователно общата енергия е

$$E_V + E_S = \frac{1}{2}(A_{int} n\varepsilon + A_S n'\varepsilon) = \frac{n\varepsilon}{2} A - \frac{(n - n')\varepsilon}{2} A_S$$

(**[0,7 т.]** за идеята и **[0,2 т.]** за израза)

Броят нуклони на повърхността е пропорционален на площта на повърхността на капката, т.е. $A_S \propto R^2 \propto A^{2/3}$. **[0,3 т.]** Така се получава

$$E_V + E_S = a_V A - a_S A^{2/3} \;\Rightarrow\; f_V(Z, A) = A\,; f_S(Z, A) = A^{2/3}$$

е) Потенциалната енергия на равномерно заредено кълбо със заряд Q и радиус R е

$$W = \frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R} \Rightarrow E_C = -W = -\frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R}$$

(**[1,5 т.]** за извод на формулата)

Зарядът е $Q = Ze$, където $e \approx 1.6 \cdot 10^{-19} C$ е елементарния електричен заряд. Имайки предвид $R = r_0 A^{1/3}$ се получава:

$$E_C = -\frac{3}{5}\frac{ke^2}{r_0}\frac{Z^2}{A^{1/3}} \Rightarrow f_C(Z, A) = Z^2 A^{-\frac{1}{3}}, a_C = \frac{3}{5}\frac{ke^2}{r_0} \approx 0.72 \text{ MeV}$$

(**[0,2 т.]** за пресмятането и резултата)

ж) За $\varepsilon_{\text{св}} \coloneqq E_{\text{св}}/A$ имаме:

$$\varepsilon_{\text{св}}(Z, A) = \frac{E_{\text{св}}}{A} = a_V - a_S A^{-\frac{1}{3}} - a_C Z^2 A^{-\frac{4}{3}} - a_A \left(1 - \frac{2Z}{A}\right)^2$$

Ще намерим поредният номер на най-стабилното ядро с дадено масово число:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial Z} = -2a_C Z A^{-\frac{4}{3}} - 2a_A\left(1-\frac{2Z}{A}\right)\left(-\frac{2}{A}\right) = 0 \Rightarrow Z = \frac{A}{2}\left(1+\frac{a_C}{4a_A}A^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}$$

$$\Rightarrow Z \approx \frac{A}{2} - \frac{a_C}{8a_A}A^{\frac{5}{3}}\,; N \approx \frac{A}{2} + \frac{a_C}{8a_A}A^{\frac{5}{3}}$$

(**[0,3 т.]** за условието за екстремум и производната и **[0,1 т.]** за намирането на Z, N)

Оттук се вижда, че за леки ядра $Z \approx N \approx A/2$, а за по-тежки ядра $N > Z$.

Причината за това е, че неутроните са като лепило, което държи ядрото. Колкото по-голям е поредният номер, толкова по-големи са Кулоновите сили на отблъскване, което води до нуждата от повече неутрони. **[0,3 т.]**

з) Заместваме полученият от предната подточка резултат за $Z(A)$ в $\varepsilon_{\text{св}}(Z, A)$.

$$\varepsilon(A) = a_V - a_S A^{-\frac{1}{3}} - \frac{a_C}{4}A^{\frac{2}{3}}\left(1+\frac{a_C}{4a_A}A^{\frac{2}{3}}\right)^{-2} - a_A\left(1-\left(1+\frac{a_C}{4a_A}A^{\frac{2}{3}}\right)^{-1}\right)^2$$

$$\varepsilon(A) = a_V - a_S A^{-\frac{1}{3}} - \frac{a_C}{4\left(A^{-\frac{2}{3}} + \frac{a_C}{4a_A}\right)}$$

[0,2 т.] Нека $x = A^{-1/3}$ и $f(x) \coloneqq \varepsilon(A)$. Така се търси максимум на f.

$$f(x) = a_V - a_S x - \frac{a_C}{4x^2 + \frac{a_C}{a_A}} \Rightarrow f'(x) = -a_S + \frac{8a_C x}{\left(4x^2+\frac{a_C}{a_A}\right)^2} = 0$$

$$\Rightarrow x^2 - \sqrt{\frac{a_C}{2a_S}}\sqrt{x} + \frac{a_C}{4a_A} = 0 \Rightarrow x = \sqrt{\sqrt{\frac{a_C}{2a_S}}\sqrt{x} - \frac{a_C}{4a_A}} \approx \sqrt{0.1393\sqrt{x} - 7.651\cdot 10^{-3}}$$

x	$f(x)$
0.1000	0.190787
0.1908	0.230643
0.2306	0.243397
0.2434	0.247130
0.2471	0.248181
0.2482	0.248491
0.2485	0.248575
0.2486	0.248604
0.2486	0.248604

[0,3 т.] Полученото подлежи на решаване числено чрез итерации. Лесно се съобразява, че очакваме уравнението да има 2 решения, от които едното е много малко (което значи неестествено голяма стойност за A и Z), а другото е това, което търсим. Започвайки итерациите от $x = 0.1$ се получава $x \approx 0.2486 \Rightarrow A = x^{-3} \approx 65$. В същото време

$$Z = \frac{A}{2}\frac{1}{1+\frac{a_C}{4a_A}A^{2/3}} \approx 29$$

Следователно, търсеният от нас елемент, е $^{65}_{29}X$ – това е мед. **[0,4 т.]**

и) Енергията на свързване има минимум в недеформираното състояние, когато то е състояние на неустойчиво равновесие. Това значи, че ядрото е нестабилно, когато малки деформации водят до повишаване на енергията на свързване. **[0,7 т.]**

Нека сферичната капка се е деформирала до елипсоид ($a = b < c$) с много малък ексцентрицитет $0 < e \ll 1$. Понеже ядрото само се деформира, обемът на капката остава постоянен. Тогава $V = \frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi abc \Rightarrow R = \sqrt[3]{a^2 c}$, където R е радиусът на ядрото в недеформирано състояние. **[0,5 т.]**

Известно е, че $E_V \propto V, E_S \propto S, E_C = W$ и следователно промяната в енергията на свързване е **[0,2 т.]**

$$\Delta E_{\text{св}} = \frac{E_V \Delta V}{V_0} - \frac{E_S \Delta S}{S_0} - \frac{E_C \Delta W}{W_0}$$

където $V_0, S_0 = 4\pi R^2 = 4\pi(a^2c)^{2/3}, W_0 = \frac{3}{5}\frac{kQ^2}{R} = \frac{3}{5}\frac{kQ^2}{(a^2c)^{1/3}}$ са обемът, площта и електростатичната енергия в недеформирано състояние. Понеже обемът не се променя, $\Delta V = 0$, а останалото развиваме в ред **[0,8 т.]**:

$$S = S_0\left(1 + \frac{2e^4}{45} + \cdots\right) \Rightarrow \frac{\Delta S}{S_0} = \frac{2e^4}{45} \qquad W = W_0\left(1 - \frac{e^4}{45} - \cdots\right) \Rightarrow \frac{\Delta W}{W_0} = -\frac{e^4}{45}$$

$$\Rightarrow \Delta E_{\text{св}} = (E_C - 2E_S)\frac{e^4}{45}$$

Оттук следва, че условието за спонтанен разпад е **[0,2 т.]**

$$\Delta E_{\text{св}} > 0 \Leftrightarrow E_C > 2E_S \Leftrightarrow a_C\frac{Z^2}{A^{1/3}} > 2a_S A^{2/3} \Leftrightarrow \frac{Z^2}{A} > \frac{2a_S}{a_C} = C \approx 51$$

й) За уран-235, имаме $Z^2/A \approx 28.7 < 51$ и следователно той не се разпада спонтанно според този модел. **[0,2 т.]**

к) От закона за запазване на енергията за енергията отделена при разпада на едно ядро уран се получава **[0,2 т.]**

$$Q_1 = \left(E_n - E_{\text{св}}({}^{235}_{92}\text{U})\right) - \left(E_{3n} - E_{\text{св}}({}^{141}_{56}\text{Ba}) - E_{\text{св}}({}^{92}_{36}\text{Kr})\right)$$
$$\approx E_{\text{св}}({}^{141}_{56}\text{Ba}) + E_{\text{св}}({}^{92}_{36}\text{Kr}) - E_{\text{св}}({}^{235}_{92}\text{U})$$

След директно пресмятане с помощта на полуемпиричната формула се получава **[0,2 т.]**

$$Q_1 \approx 156.4\ \text{MeV} \approx 2.50 \cdot 10^{-11}\text{J}$$

В $m = 0.9\ \text{kg}$ уран-235 има $N = \frac{m}{235\ \text{kg/kmol}} N_A \approx 2.31 \cdot 10^{24}$ атома и следователно отделената енергия при взрива е от порядъка на

$$Q = NQ_1 \approx 5.8 \cdot 10^{13}\text{J} \approx 13.7\ \text{kt}$$

[0,1 т.]