МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
7 – 9 ноември 2025 г., гр. София
Тема за VII състезателна група (Специална тема)

<u>Задача 1.</u> Електростатика

<u>Част 1</u>: Равновесие в статични полета **[4,9 т.]**

Естествен въпрос е дали може да се постави заряд в устойчиво равновесие в някакво електростатично поле. Отговорът е добре известен – теоремата на Ирншоу.

а) Докажете теоремата, която гласи, че не съществуват положения на устойчиво равновесие за даден произволен заряд в електростатично поле. **[1,3 т.]**

Оказва се, че теоремата на Ирншоу е приложима и за дипол с фиксирано направление (например винаги насочен по оста x), поставен във външно електростатично поле.

б) Като използвате резултата от предната подточка, докажете теоремата на Ирншоу и за дипол с фиксирана ориентация. **[1,6 т.]**

Когато малко тяло, съставено от диелектричен материал, се постави във външно електростатично поле $\vec{E}_{\text{ext}}$, то се поляризира и може да се моделира като точков дипол с диполен момент $\vec{P} = \alpha\vec{E}_{\text{ext}}$ за $\alpha = \beta\varepsilon_0\chi$, където α е поляризуемостта на тялото, $\chi = \varepsilon_r - 1$ е диелектричната възприемчивост, а β е величина зависеща от формата и размерите на тялото.

в) Определете потенциалната енергия W на такова тяло, изразена чрез външното поле $\vec{E}_{\text{ext}}$ и поляризуемостта му α. **[0,7 т.]**

Оказва се, че теоремата на Ирншоу е приложима и за малки тела, съставени от диелектричен материал – такива тела се намират в неустойчиво равновесие, независимо от направлението на отместване от равновесие.

г) Важи ли теоремата на Ирншоу за малки тела, съставени от магнитни материали? Възможна ли е магнитна левитация? **[1,3 т.]**

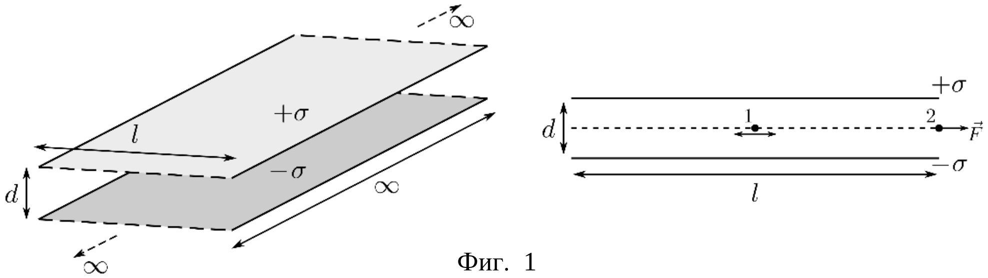
<u>Част 2</u>: Трептения **[5,1 т.]**

Тънък неподвижен непроводящ пръстен с радиус R е зареден равномерно със заряд q. Точков заряд q с маса m е поставен в центъра на пръстена. Системата се намира във вакуум, далеч от други тела. Оста на пръстена съвпада с оста z, като $z = 0$ съвпада с равнината на пръстена, r е разстоянието до оста, а θ е азимуталният ъгъл, т.е. изпозвани са цилиндрични координати.

д) Намерете електричното поле $\vec{E}(r, \theta, z)$, създадено от пръстена, в близост до центъра. Отговора дайте във вида $\vec{E} = (E_r, E_\theta, E_z)$, изразени чрез r, z, θ и други известни константи от условието, като $r, z \ll R$. **[1 т.]**

е) Малко отклонение в кое направление (радиално по r или вертикално по z) води до хармонично трептене? Намерете периода T на тези трептения. Покажете, че равновесието в центъра е неустойчиво. **[0,5 т.]**

В центъра на полубезкраен плосък „кондензатор“ с ширина l и разстояние между плочите d е поставена малко тяло, съставено от диелектричен материал, с поляризуемост α и маса m (положение 1 на фиг.1). Плочите на кондензатора приемете за непроводящи и равномерно заредени с повърхнинна плътност на заряда съответно $+\sigma$ и $-\sigma$.



Фиг. 1

ж) Определете периода на малки трептения на частицата в хоризонтално направление. Отговора изразете чрез $\varepsilon_0, \alpha, \sigma, m, l, d$. Приемете, че $l \gg d$. **[1,6 т.]**

Тялото е поставено на единия край на кондензатора, равноотдалечено от двете плочи (положение 2 на фиг. 1).

з) Определете големината и посоката на силата F, действаща на тялото. Отговора изразете чрез $\varepsilon_0, \alpha, \sigma, l, d$. **[0,5 т.]**

В началния момент тялото е в покой на единия край на кондензатора (положение 2 на фиг. 1).

и) Ако $l \ggg d$, определете периода на възникналите трептения. Отговора изразете чрез $\varepsilon_0, \alpha, \sigma, m, l, d$. **[1,5 т.]**

Полезна математика:

Разложение по ред на Маклорен: $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2$

$$\frac{d}{dx}(\arctan x) = \frac{1}{1+x^2}$$

Задача 2. Рентгенови лъчи

На 8. ноември 1895 г. Вилхелм Рьонтген наблюдавал за пръв път наречените на негово име *рентгенови лъчи*. По-късно той прави и първата рентгенова снимка на ръката на жена си, която заявява, че е видяла смъртта, когато я вижда за пръв път.

Рентгеновите лъчи (още известни като X-лъчи) са тип електромагнитна (ЕМ) радиация с дължина на вълната от 0,01 nm – 10 nm, която намира широко приложение в днешно време. В тази задача ще бъдат разгледани различни начини за получаване на рентгеново лъчение.

Част 1: Катодно-лъчева тръба **[0,7 т.]**

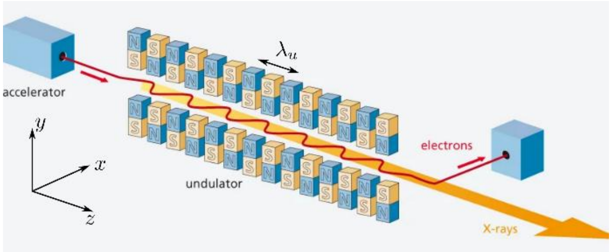
Рьонтген използва катодно-лъчева тръба, когато наблюдавал за пръв път рентгеновите лъчи. При нея отделени от анода електрони се ускоряват от ускоряващо напрежение U и се „забиват“ в катода. При това, електронът изпитва голямо забавящо ускорение и следователно излъчва ЕМ лъчение, наречено спирачно лъчение (Bremsstrahlung). Полученият спектър на това лъчение има рязка граница при някаква минимална дължина на вълната λ_{min}.

а) Намерете минималната дължина на вълната λ_{min}. Определете минималното ускоряващо напрежение U_{min}, при което се наблюдават рентгенови лъчи. **[0,6 т.]**

б) Кохерентно ли е полученото по този начин лъчение? **[0,1 т.]**

<u>Част 2</u>: Лазер на свободни електрони (Free Electron Laser – FEL) **[6,3 т.]**

Лазерът на свободни електрони е един от най-широко използваните методи за генериране на къси интензивни кохерентни лазерни импулси на рентгенови лъчи с регулируема дължина на вълната. Той се състои от източник на електрони, линеен ускорител на електрони и т.нар. ондулатор (undulator).



Един тип ондулатор, с дължина L, се състои от две успоредни последователности от магнити с редуваща се ориентация. Така се получава напречно магнитно поле, чиято индукция се мени приблизително синусоидално по дължината на ондулатора:

$$\vec{B}(z) = B_0 \sin(k_u z)\,\vec{e}_y \ , \qquad k_u = 2\pi/\lambda_u$$

където λ_u е пространственият период на подредбата от магнити в ондулатора (разстоянието между два последователни магнита с еднаква ориентация). Въвежда се параметър на ондулатора $K = \frac{eB_0}{m_e c k_u}$.

Линейният ускорител ускорява електроните до състояние с Лоренцов фактор[1] $\gamma_0 \gg 1$, които преди да навлязат в ондулатора имат скорост, насочена под ъгъл спрямо оста на ондулатора (оста z). Така под въздействието на магнитното поле в ондулатора, електроните се движат надлъжно по оста z, като извършват и напречно трептеливо движение около нея.

в) Определете зависимостта на скоростта на електроните $v_x(z), v_z(z)$ вътре в ондулатора. Определете средната скорост $\overline{v_z}$ на движение по оста z. Отговорите изразете чрез K, γ_0, k_u, z. **[1 т.]**

Трептеливото движение на електроните води и до излъчване на ЕМ вълни. ЕМ поле на тези вълни извършва работа върху тези електрони, което обуславя механизма за обмен на енергия между електроните и лъчението, т.е. така се получава и усилването на лъчението.

г) С каква поляризация ще бъде полученото лъчение? **[0,2 т.]**

Нека някъде в ондулатора вече се е генерирало ЕМ лъчение с кръгова честота ω и дължина на вълната λ_w, като амплитудата на вектора на електричното поле е $E_0 \ll cB_0$, т.е. $E(z,t) = E_0 \sin(k_w z - \omega t + \varphi_0)$, където φ_0 е някаква начална фаза и $k_w > 0$.

д) Намерете моментната мощност $P(z,t)$ на силата в момент от време t, с които това ЕМ лъчение действа на даден електрон намиращ се в точка z. Отговорът изразете, чрез $\theta_\pm = (k_w \pm k_u)z - \omega t + \varphi_0$ – това са сборът и разликата на фазите на ЕМ вълната и магнитното поле. **[1 т.]**

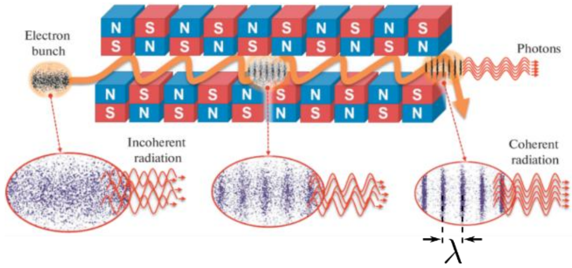
[1] Лоренцов фактор $\gamma = 1/\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}$

е) Като приемете, че $v_z \approx \bar{v_z} = const.$, намерете средната отдадена от електрона енергия за единица изминато разстояние l в ондулатора $\left\langle \frac{dE}{dz} \right\rangle = \frac{\Delta E}{l}$. Резултата изразете, чрез $\theta_{\pm,0} = \theta_{\pm}(z_0)$ и $\Delta\theta_{\pm} = \theta_{\pm}(z_0 + l) - \theta_{\pm,0}$. **[0,8 т.]**

ж) При фиксирани параметри на ондулатора и навлизащите електрони, се наблюдава резонансно поведение в увеличението на лъчение с дължина на вълната $\lambda_w = \lambda_r$. Изразете λ_r чрез λ_u, γ_0, K, като приемете, че $\gamma_0 \gg 1$. **[1 т.]**

з) Колко трябва да бъде ускоряващото напрежение U в линейният ускорител на FEL с ондулатор с $\lambda_u = 68$ mm и $B_0 = 1.3$ T, за да се получи лазерно лъчение в областта на мекия рентген ($\lambda_w \sim 1$ nm)? **[0,2 т.]**

По време на работата на такъв лазер, се наблюдава явлението *microbunching*, при което електроните се сгъстяват на места и разреждат на други, като по този начин се разделят на групички, които се разпространяват в ондулатора. Така се постига кохерентността на лъчението.



и) Покажете, че при $\lambda_w = \lambda_r(\lambda_u, \gamma_0, K)$ електрон, преминаващ през ондулатора, има следните уравнения на движение:

$$\frac{d\theta}{dz} = 2k_u\eta \qquad \frac{d\eta}{dz} = \frac{KE_0e}{2\gamma_0^2 mc^2}\sin\theta$$

където $\theta = \theta_+$ и $\eta = \frac{\gamma(z)}{\gamma_0} - 1$ носят информация за положението и скоростта на електрона. Приемете, че $\eta \ll 1$. **[0,8 т.]**

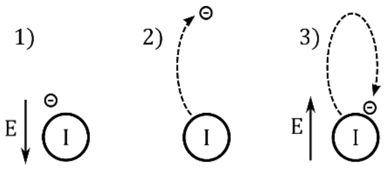
й) С помощта на класическа механична аналогия, опишете качествено движението на електроните през ондулатора спрямо ЕМ лъчение. Покажете, че електроните се струпват около точки с $\theta = \theta_{bunch}$ и определете разстоянието λ между два съседни bunch-а. **[1,3 т.]**

<u>Част 3</u>: Генериране на високи хармоники **[3 т.]**

Лазерът на свободни електрони е ефективен метод за генериране на кохерентна рентгенова светлина, но същевременно представлява един огромен уред, който употребява и много енергия. Съществува и друг метод за генериране рентгенов лазер с помощта на нелинейния оптичен процес на генериране на високи хармоники. В тази област има и българска следа в лицето на проф. Теньо Попминчев и неговия екип, чиято работа на практика направи този подход прагматичен.

Генерирането на високи хармоники е нелинеен процес на взаимодействие на среда с лъчение с висока интензивност. При такова взаимодействие се поражда и светлина с честоти, кратни на фундаменталната честота f (честотата на падащото монохроматично лъчение). Генерираната светлина с честота nf наричаме n-та хармоника ($n \in \mathbb{N}$).

Да разгледаме монохроматично лъчение с кръгова честота ω и висок интензитет I, попадащо в среда от разреден благороден газ или водород. В този случай генерирането на високи хармоники се описва добре от т.нар. *3-стъпков модел*:



1) Под въздействието на електричното поле на лъчението, електрон от външната обвивка

на атом от газа тунелира. Така този атом претърпява *тунелна йонизация*. Приема се, че електронът се появява в покой непосредствено до точковия йон и че от този момент нататък той може да се счита за свободен.

2) Под действието на осцилиращото електрично поле на лъчението, свободният електрон бива ускорен надалеч от йона и след това ускорен обратно към йона.

3) Когато електронът отново стигне йона, те рекомбинират и се получава първоначалният неутрален атом, при което се отделя 1 фотон.

Добре е да се отбележи, че процесът описан горе започва с тунелната йонизация на електрон, която може да стане по всяко време, независимо от фазата на лъчението в този момент.

к) Оценете минималната интензивност I_{min} на лазерното лъчение, при която е приложим моделът. Известно е, че връзката между амплитудата на интензитета на електричното поле и интензитета на светлината е $I = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E^2$. Приемете, че газът е водород. **[0,5 т.]**

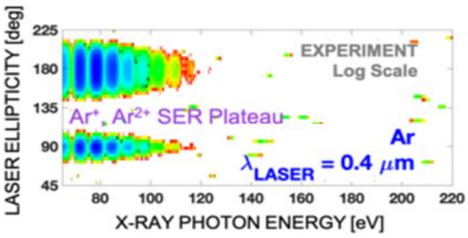
л) Обяснете защо процесът на генерация на високи хармоники е неефективен, ако задвижващото лазерно лъчение е елиптично поляризирано. **[0,4 т.]**

При трептене на заредена частица със заряд q и маса m в хармонично електрично поле $E(t) = E_0 \cos \omega t$, се въвежда величината *пондеромоторен потенциал* U_p, който се дефинира като средната кинетична енергия на този заряд.

м) Изразете U_p чрез m, q, ω, E_0. **[0,4 т.]**

н) Покажете, че максималната енергия на фотон от генерираните високи хармоники при описаният процес е $\varepsilon_{max} = U_i + \kappa U_p$, където U_i е йонизационният потенциал на външния електрон, и определете κ с точност до 1 знак след десетичната запетая. **[1,5 т.]**

о) Като използвате данните от фигурата, определете приблизително интензитета I на използваните лазерни импулси. Известно е, че йонизационният потенциал за аргона е 15.8 eV. **[0,2 т.]**



<u>*Упътване*</u>: Разполагате с помощна графиката на функцията $y = \cos x$, както и със спомагателна ос при $x = 2$, която е разграфена така, че точка с надпис a, е с координати $(2, \cos(a) + \sin(a)\,(a-2))$. Можете да използвате тази графика за построяване на допирателни към $y = \cos x$.

Ако се наложи да чертаете графика, може да използвате празното пространство на помощната графика.

<u>*Полезна математика*</u>:

$$\text{За } x \ll 1: \qquad (1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x$$

Задача 3. Физика на ядрото

Атомното ядро е съставено от протони и неутрони. Въпреки кулоновото отблъскване между протоните, ядрото остава свързано благодарение на *остатъчното силно ядрено взаимодействие*. Както електромагнитното взаимодействие си има своята частица преносител – фотонът, така и това взаимодействие има своята частица преносител – *пион* (π). За разлика от фотона, пионът има ненулева маса, което обяснава близкодействието на това взаимодействие.

а) Ако масата на пиона е $m_\pi \approx 135\,\mathrm{MeV}/c^2$, оценете радиуса r_π на действие на остатъчното силно ядрено взаимодействие. **[0,9 т.]**

Както е известно, масата на ядрото не е равна на сумата от масите на съставящите го частици. Разликата се нарича масов дефект.

б) Изразете масовия дефект $\Delta m = m_я - \left(Zm_p + Nm_n\right)$ чрез енергията на свързване на ядрото $E_{св} > 0$. **[0,3 т.]**

За да даде количествено обяснение на този дефект, през 1930 г. Георги Гамов предлага *капков модел*, според който ядрото се разглежда като капка от еднородна, несвиваема, равномерно заредена течност.

в) Покажете, че радиусът на ядрото се дава от $R = r_0 A^{1/3}$. Пресметнете r_0, ако е известно, че $R(^{210}_{84}\mathrm{Po}) \approx 7.2$ fm. **[0,4 т.]**

През 1935г. Карл Вайцзекер получава полуемпиричната формула, базирана на този модел, която добре описва енергията на свързване на средни и тежки ядра. Тя включва 4 основни члена – обемен (E_V), повърхнинен (E_S), Кулонов (E_C) и асиметричен (E_A):

$$E_{св} = E_V + E_S + E_C + E_A = a_V f_V(Z,A) - a_S f_S(Z,A) - a_C f_C(Z,A) - a_A \frac{(N-Z)^2}{A}$$

където функциите $f_{V,S,C}(Z,A)$ са от вида $Z^\alpha A^\beta$.

Обемният и повърхнинният терм са потенциалните енергии на остатъчното ядрено взаимодействие. Това взаимодействие е еднакво силно за протоните и неутроните. В този модел нуклоните на практика взаимодействат само със своите преки съседи, което е аналогично на взаимодействието на молекулите в една течност. По тази причина и тук се наблюдава явление подобно на повърхностното напрежение.

г) Имайки предвид полученото досега, аргументирайте се защо е добро приближение да се смята, че само съседните нуклони си взаимодействат чрез ядреното взаимодействие. **[0,8 т.]**

д) Намерете $f_V(Z,A)$ и $f_S(Z,A)$. **[1,2 т.]**

Кулоновият член представлява електростатичната потенциална енергия на ядрото.

е) Намерете $f_C(Z,A)$. Намерете и изчислете a_C. Стойността представете в MeV. **[1,7 т.]**

Оттук нататък приемете $a_V = 15.8$ MeV, $a_S = 18.3$ MeV, $a_C = 0.71$ MeV, $a_A = 23.2$ MeV.

Мярка за стабилността на ядрата е средната енергия на свързване за нуклон, т.е. $E_{св}/A$.

ж) Намерете Z за най-стабилно ядро с дадено масово число A. Покажете, че за леките елементи $Z \approx N$, а за тежките $Z < N$ и дайте качествено обяснение за това. **[0,7 т.]**

з) Оценете поредният номер Z и масовото число A на най-стабилните ядра. **[0,9 т.]**

През 1938 г. Ото Фриш и Фриц Щрасман наблюдават разпад на уран ($Z = 92$) до барий ($Z = 56$) и криптон ($Z = 36$) след бомбардиране с бавни неутрони. До тогава се е смятало за невъзможно да се отцепят толкова големи парчета от ядрото – особено от бавни неутрони. В края на същата година Лиза Майтнер (родена на 9. ноември) и Ото Хан обясняват процеса чрез капковия модел като следствие от предизвиканото от неутрона разтрептяване на капката и последващото ѝ разделяне.

и) Като разгледате слабо деформирано ядро по капковия модел, покажете, че за ядра с $Z^2/A \gtrsim C$ сферичната капка е в неустойчиво равновесие и ядрото спонтанно се разпада. Изразете критичната стойност C чрез a_S и a_C и я изчислете. Пренебрегнете асиметричния член в полуемпиричната формула. **[2,4 т.]**

й) Разпада ли се спонтанно $^{235}_{92}\text{U}$ според този модел? **[0,2 т.]**

Разпадът на уран-235, предизвикан от неутрон, е $n + {}^{235}_{92}\text{U} \rightarrow {}^{141}_{56}\text{Ba} + {}^{92}_{36}\text{Kr} + 3n$.

к) Определете енергията Q, която се е отделила при детонацията на атомната бомба „Little Boy“ (Хирошима). Известно е, че само 0.9 kg уран-235 е претърпял разпад. Отговора представете в единици килотон тротил kt, където $1\ \text{kt} = 4.2 \cdot 10^{12}\text{J}$. Пренебрегнете енергията на отделилите се неутрони. **[0,5 т.]**

Забележка: Бомбата всъщност е имала общо 51kg уран-235!!!

Полезна математика:

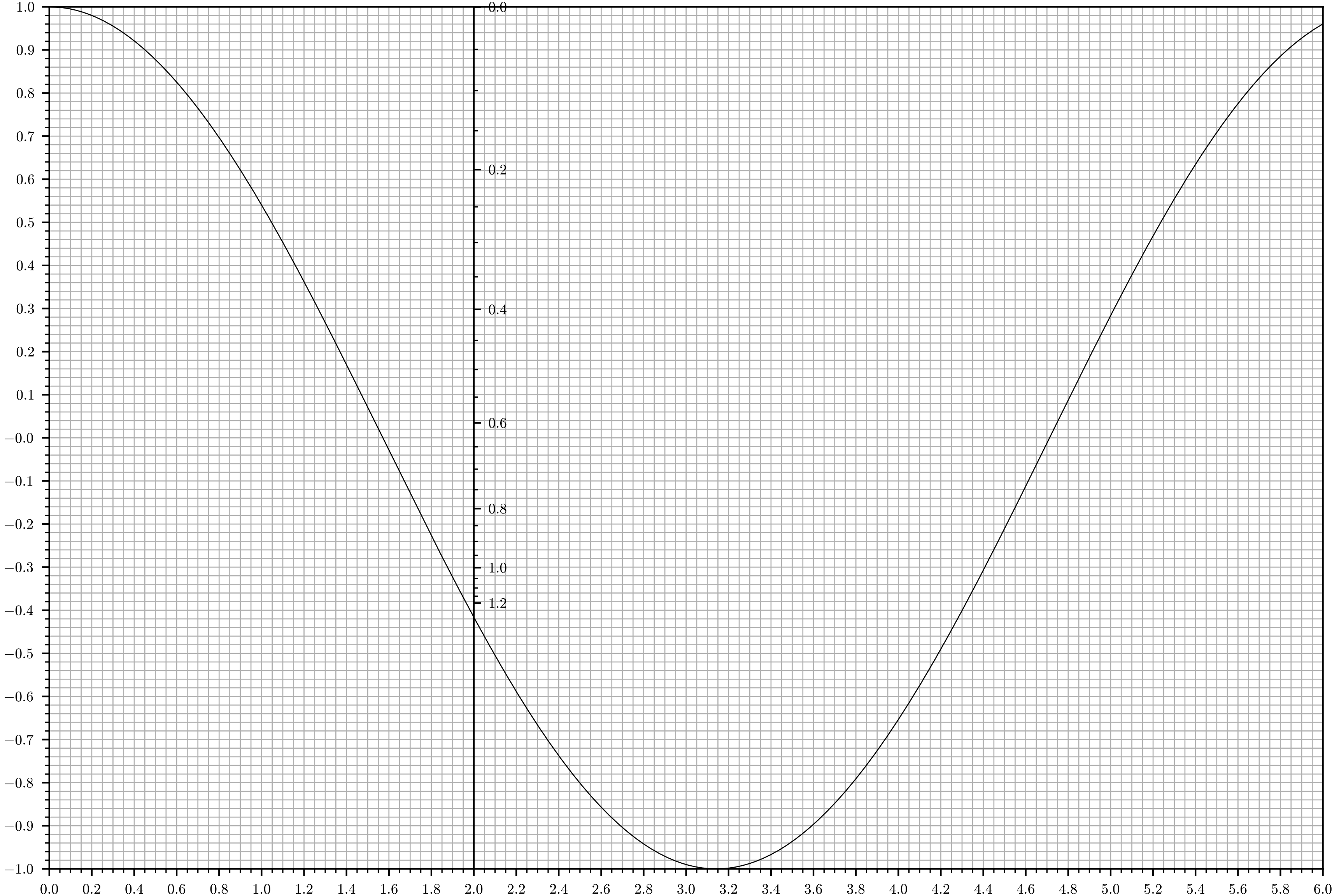
За $x \ll 1$: $(1 + x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \dfrac{\alpha(\alpha - 1)}{2} x^2$ $\qquad \arcsin x \approx x + \dfrac{x^3}{6} + \dfrac{3x^5}{40}$

Енергия на равномерно зареден елипсоид $\left(a = b < c\,; e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}\right)$:

$$W = \frac{3kQ^2}{5\sqrt[3]{a^2 c}} (1 - e^2)^{\frac{1}{6}} \frac{\arcsin e}{e}$$

Площ на елипсоид $\left(a = b < c\,; e = \sqrt{1 - \frac{a^2}{c^2}}\right)$:

$$S = 2\pi(a^2 c)^{\frac{2}{3}} \left[(1 - e^2)^{\frac{1}{3}} + \frac{\arcsin e}{e(1 - e^2)^{\frac{1}{6}}}\right]$$


1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
−0.0
−0.1
−0.2
−0.3
−0.4
−0.5
−0.6
−0.7
−0.8
−0.9
−1.0
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
0.0 0.2 0.4 0.6 0.8 1.0 1.2 1.4 1.6 1.8 2.0 2.2 2.4 2.6 2.8 3.0 3.2 3.4 3.6 3.8 4.0 4.2 4.4 4.6 4.8 5.0 5.2 5.4 5.6 5.8 6.0