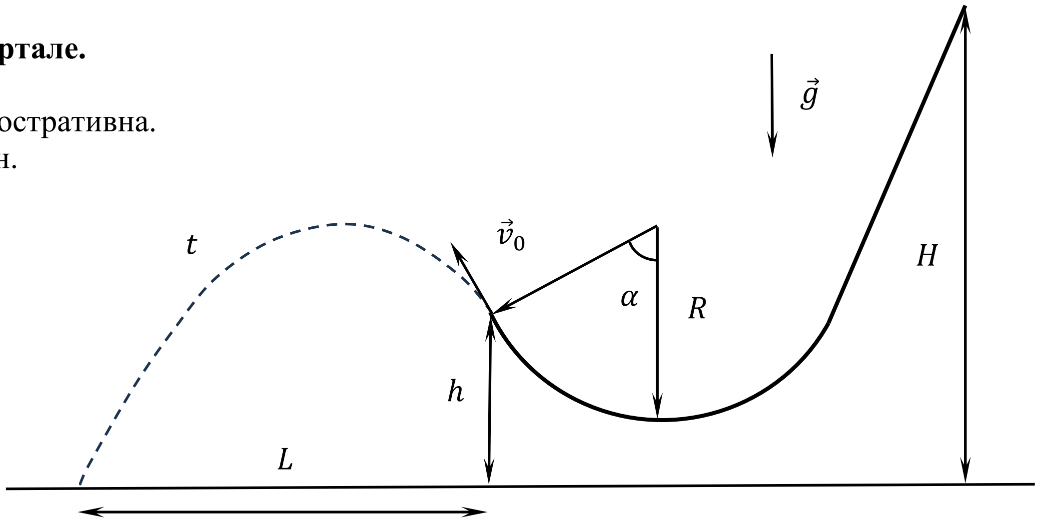
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ЕСЕННО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
7 – 9 ноември 2025 г., София

Решение на темата за 12. клас (шеста състезателна група)

<u>Задача 1.</u> Салто мортале.

Фигурата е само илюстративна.
Мащабът не е спазен.



а) Движението по вертикалата се описва с уравнението $0 = h + v_0 \sin\beta t - \frac{1}{2}gt^2$. **[0,5 т.]**

От него положителното решение за t е $t = \frac{v_0 \sin\beta + \sqrt{{v_0}^2 \sin\beta^2 + 4\frac{1}{2}gh}}{2.\frac{1}{2}g} = \frac{v_0 \sin\beta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2 \sin\beta^2}}\right)$. **[1,0 т.]** Далечината на полета е $L = v_0 \cos\beta\, t = \frac{{v_0}^2 \sin\beta \cos\beta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2 \sin\beta^2}}\right)$. **[0,5 т.]**

б) От закона за запазване на механичната енергия, приложен за началния и крайния момент от движението по пистата, $mgH = mgh + \frac{m{v_0}^2}{2} + \frac{I{\omega_0}^2}{2}$. **[0,5 т.]** Може да се съобрази, че линейната и ъгловата скорост на велосипедиста са свързани така: $v_0 = R\omega_0$. **[0,5 т.]** Така получаваме $v_0 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1+\frac{I}{mR^2}}}$. **[1,0 т.]**

в) За да се приземи велосипедистът едновременно с двете колела на велосипеда, трябва да се завърти на ъгъл $\varphi_N = N2\pi - \alpha$. **[0,5 т.]**

г) По време на движението по парабола велосипедистът продължава да се върти с ъгловата скорост, с която е напуснал пистата. Тогава $N2\pi - \alpha = \omega_0 t = \frac{v_0 t}{R}$. **[0,5 т.]**

Използвайки по-горе получените формули за v_0 и t

$$N2\pi - \alpha = \frac{v_0^2 \sin\alpha}{gR}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2 \sin^2\alpha}}\right) = \frac{2h}{R\sin\alpha}\frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2gh}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2 \sin^2\alpha}}\right)$$

Нека $x = \frac{2gh}{v_0^2 \sin^2\alpha}$ и $A_N = \frac{(2\pi N - \alpha)R\sin\alpha}{2h}$. Тогава:

$$\frac{(2\pi N - \alpha)R\sin\alpha}{2h}x = A_N x = 1 + \sqrt{1+x} \Rightarrow (A_N x - 1)^2 = 1 + x \Rightarrow x\left(A_N^2 x - (2A_N + 1)\right) = 0$$

$$\Rightarrow x_N = \frac{2A_N + 1}{A_N^2}$$

От друга страна, $\frac{v_0^2}{2gh} = \left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)^{-1}\left(\frac{H}{h} - 1\right)$. И тогава:

$$H_N = h\left(1 + \frac{1}{x_N \sin^2\alpha}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)\right)$$

$$\Rightarrow H_N = h\left(1 + \frac{A_N^2}{(2A_N + 1)\sin^2\alpha}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)\right), A_N = \left(\pi N - \frac{\alpha}{2}\right)\frac{R}{h}\sin\alpha$$

$H_N = h\left(1 + \frac{\left(\pi N - \frac{\alpha}{2}\right)^2\left(\frac{R}{h}\right)^2}{(2\pi N - \alpha)\frac{R}{h}\sin\alpha + 1}\left(1 + \frac{I}{mR^2}\right)\right)$ **[1,5 т.]**

Алтернативно решение:

Използвайки по-горе получените формули за v_0 и t, $N2\pi - \alpha = \frac{v_0}{R}\frac{v_0 \sin\alpha}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2 \sin\alpha^2}}\right)$ $= \frac{2g(H-h)\sin\alpha}{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)gR}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{\frac{2g(H-h)}{1+\frac{I}{mR^2}}\sin\alpha^2}}\right)$. **[0,5 т.]** Решавайки го неявно спрямо H,

$H_N = h + \frac{(N2\pi - \alpha)R\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)}{2\sin\alpha}\frac{1}{\left(1+\sqrt{1+\frac{\left(1+\frac{I}{mR^2}\right)}{\left(\frac{H_N}{h}-1\right)\sin\alpha^2}}\right)}$. **[1,0 т.]**

д) Използвайки дадените стойности и за $N = 1$ след заместване $H_1 \approx 18{,}75$ m. **[2,5 т.]**

Алтернативно решение:

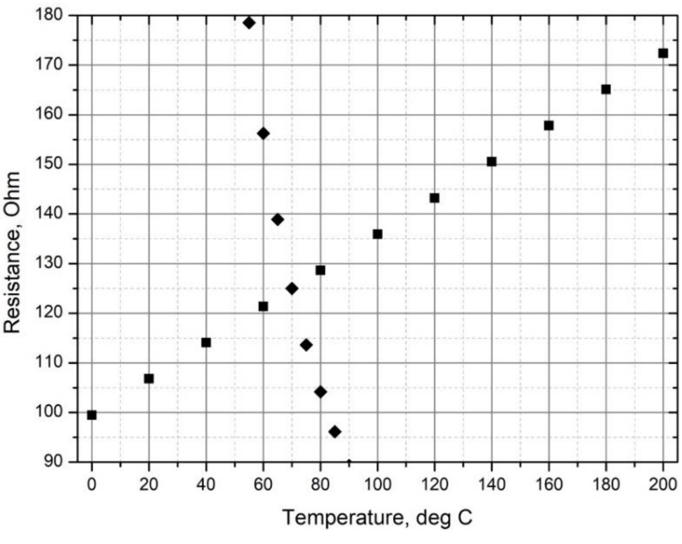
Използвайки дадените стойности и за $N = 1$, се получава $H = 5 + \frac{30{,}53}{1+\sqrt{1+\frac{1{,}347}{\frac{H}{5}-1}}}$. **[0,5 т.]** Пробвайки итерационен метод, започвайки примерно от $H(0) = 10$ m, получаваме $H(1) = 17{,}06$ m, **[0,5 т.]** $H(2) = 18{,}58$ m, **[0,5 т.]** $H(3) = 18{,}73$ m, **[0,5 т.]** $H(4) = 18{,}75$ m, **[0,5 т.]** $H(5) = 18{,}75$ m. Приемаме това за окончателен отговор. Ако започнем от по-висока стойност, примерно $H(0) = 30$ m, получаваме $H(1) = 19{,}36$ m, $H(2) = 18{,}80$ m, $H(3) = 18{,}75$ m, $H(4) = 18{,}75$ m. Получава се същата стойност.

е) Замествайки $v_0 = \sqrt{\frac{2g(H-h)}{1+\frac{I}{mR^2}}} = \sqrt{\frac{2.9{,}81(18{,}75-5)}{1{,}01}} \approx 16{,}3$ m/s. **[0,5 т.]** Съответно за $L = \frac{{v_0}^2 \sin\beta\cos\beta}{g}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2gh}{{v_0}^2\sin\beta^2}}\right) = \frac{16{,}3^2\sqrt{3}}{9{,}81.4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{2.9{,}81.5}{16{,}3^2 3/4}}\right) \approx 26{,}1$ m. **[0,5 т.]**

<u>Задача 2.</u> Равновесна температура.

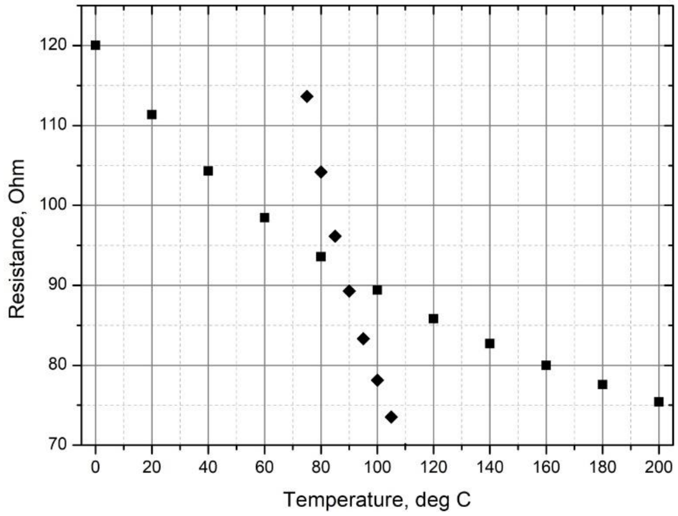
а) При равновесната температура входящата електрична мощност е равна на разсеяната топлинна мощност, $\frac{E^2}{R(T)} = \alpha 2S(T - T_0)$. Решено спрямо $R(T)$, $R(T) = \frac{E^2}{\alpha 2S(T-T_0)}$. **[0,5 т.]** Пресечната точка на тази графика с дадената зависимост $R_1(T)$, има за координата равновесната температура. **[0,5 т.]**

T, °C	$R(T), \Omega$
55	179
60	156
65	139
70	125
75	114
80	104
85	96



Изчисляваме данните в таблица **[0,5 т.]** и построяваме тази графика. **[1,0 т.]** Пресечната точка има координати 70 °C и 125 Ω, следователно температурата T_1 на пластината от вещество 1 е 70 °C. **[0,5 т.]**

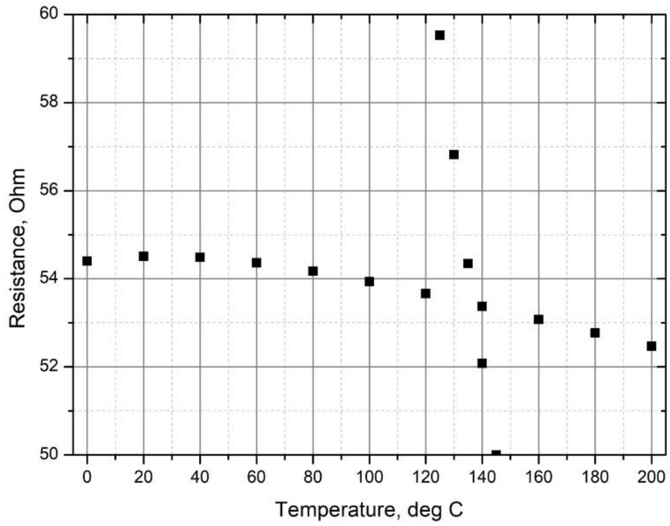
б) Повтаряйки процедурата от предишното подусловие, изчисляваме данните в таблица **[0,5 т.]** и построяваме отново графиката $R(T) = \frac{E^2}{\alpha 2S(T-T_0)}$ в подходящия температурен интервал (интервал от съпротивления). **[1,0 т.]** Пресечната точка има координати 88 °C и 92 Ω, следователно температурата T_2 на пластината от вещество 2 е 88 °C. **[1,5 т.]**



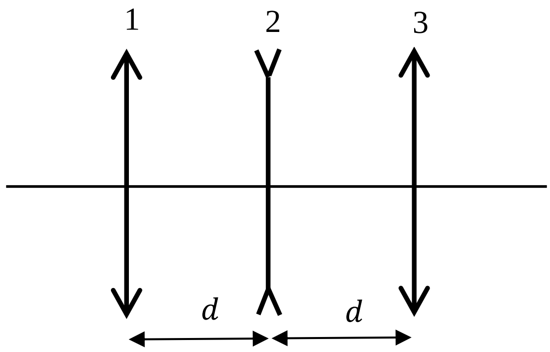
T, °C	$R(T), \Omega$
75	114
80	104
85	96
90	89
95	83
100	78
105	74

в) В този случай пластините са успоредно свързани и по-горното уравнение се преобразува до $\frac{E^2}{R_1(T)} + \frac{E^2}{R_2(T)} = \alpha 2S(T - T_0)$. **[0,5 т.]** Следователно $\frac{E^2}{\alpha 2S(T-T_0)} = \frac{R_1(T).R_2(T)}{R_1(T)+R_2(T)}$. **[0,5 т.]** Изчисляваме данните в таблица. **[1,0 т.]** Чертаем двете графики на една фигура. **[1,0 т.]** Пресечната точка има координати 137 °C и 53.5 Ω, следователно температурата T_3 на пластината от вещество 2 е 137 °C. **[1,0 т.]**

T, °C	$R_1(T)$, Ω	$R_2(T)$, Ω	$\frac{R_1(T).R_2(T)}{R_1(T)+R_2(T)}$, Ω	$R(T) = \frac{E^2}{\alpha 2S(T-T_0)}$, Ω
0	99	120	54.4	
20	107	111	54.5	
40	114	104	54.5	
60	121	98	54.4	
80	129	94	54.2	
100	136	89	53.9	
120	143	86	53.7	
125				59.5
130				56.8
135				54.3
140	151	83	53.4	52.1
145				50.0
160	158	80	53.1	
180	165	78	52.8	
200	172	75	52.2	



<u>Задача 3.</u> Лещи.



а) Нека използваме обратимостта на лъчите. **[0,3 т.]** Тогава успореден сноп идва отдясно на леща 3. Той се събира във фокуса ѝ. **[0,4 т.]** Тъй като $\Phi_+ = +5$ dpt, то фокусното ѝ разстояние е $f_3 = \frac{1}{\Phi_+} = 20$ cm. **[0,4 т.]** Този образ е източник за леща 2, но ѝ е отляво на 10 cm. **[0,4 т.]** От формулата за тънка леща 2 следва $\frac{1}{-10\text{ cm}} + \frac{1}{b} = \frac{1}{-20\text{ cm}}$, **[0,4 т.]** откъдето $b = 20$ cm. **[0,4 т.]** Следователно този образ е на 10 cm вляво от леща 1. **[0,4 т.]** Отново използвайки формулата за тънка леща 1 следва $\frac{1}{-10\text{ cm}} + \frac{1}{x} = \frac{1}{20\text{ cm}}$, **[0,4 т.]** откъдето $x = \frac{20}{3} \approx 6{,}7$ cm. **[0,4 т.]**

б) Отново използвайки обратимостта на лъчите може да стигнем до извода, че след като източникът и последният образ са разположени симетрично на едно и също разстояние съответно от лещи 1 и 3, то и източникът и образът за леща 2 също са разположени симетрично спрямо нея. **[0,5 т.]** Тъй като не може и двата да са действителни (падащият сноп да е разходящ, а пречупеният да е сходящ), следва че и двата са недействителни (падащият сноп да е сходящ, а пречупеният да е разходящ). **[0,5 т.]** Нека те се намират на разстояние z от нея. Тогава $\frac{1}{-z} + \frac{1}{-z} = \frac{1}{-20\text{ cm}}$, **[0,5 т.]** откъдето $z = 40$ cm. **[0,5 т.]** Това означава, че образът от леща 1 е на 50 cm зад нея. **[0,5 т.]** Тогава $\frac{1}{y} + \frac{1}{50\text{ cm}} = \frac{1}{20\text{ cm}}$, **[0,5 т.]** откъдето $y = \frac{100}{3} \approx 33{,}3$ cm. **[0,5 т.]**

в) Може да се провери, че ситуация със симетрично разположени източник и образ спрямо леща 2 е невъзможна тъй като фокусното разстояние на лещи 1 и 3 е по-малко от 40 cm. **[1,0 т.]** Тогава единствената възможност остава източникът и образът за леща 2 да съвпадат с нейния център. **[1,0 т.]** Тогава разстоянието между лещите трябва да е равно на фокусното разстояние на лещи 1 и 3, т.е. $d' = 20$ cm. **[1,0 т.]**