МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Областен кръг на олимпиадата по астрономия
23 февруари 2025 г.
Възрастова група XI-XII клас – Решения

Задача 1. Климатичен проблем. Ученикът Мишо е решил да участва в конкурс за проекти на тема „Как да се справим с глобалното затопляне". И той измисля идея! Според нея, с мощни ракетни двигатели трябва да преместим планетата джудже Церера до първата точка на Лагранж за системата Земя-Слънце. Това е точка, намираща се на правата линия между центровете на Земята и Слънцето, на разстояние 1,5 милиона километра от Земята. Поставен в тази точка, даден обект под съвместното действие на гравитационните сили на Земята и Слънцето може да остава в частично равновесие, което може да се поддържа с леки маневри на закрепени към обекта двигатели.

- **А)** Колко процента от слънчевото лъчение, идващо към Земята, ще блокира Церера? **[6 т.]**
- **Б)** С колко келвина трябва да се понижи температурата на Слънцето, така че да се постигне същият ефект, без да се закрива част от него? **[6 т.]**

Справочни данни:

Радиус на Церера	$R_C = 473$ km
Радиус на Слънцето	$R_\odot = 696000$ km
Разстояние от Земята до Слънцето	$r_E = 1{,}496.10^8$ km
Температура на Слънцето	$T_\odot = 5770$ K

Решение.

А) Видимият ъглов радиус на Слънцето е

$$\rho_\odot = \frac{R_\odot}{r_E}.$$

Когато Церера бъде пренесена в първата точка на Лагранж, отдалечена от Земята на разстояние $r_1 = 1{,}5 \times 10^6$ km, нейният видим ъглов радиус ще бъде

$$\rho_\mathrm{C} = \frac{R_C}{r_1}.$$

Частта от ъгловата площ на видимия слънчев диск, която ще бъде закрита от Церера, ще бъде

$$k = \frac{\pi {\rho_\mathrm{C}}^2}{\pi {\rho_\odot}^2} \approx 0{,}00461 \approx \mathbf{0{,}46\%}.$$

Макар да е много сложно да се прецени каква трябва да е тази величина, за да се получи желаният ефект за предотвратяване на глобалното затопляне, можем да предположим, че получената стойност е доста малка за тази цел. Навярно, за да се осъществи идеята на Мишо, в първата точка на Лагранж трябва да се пренесе някой по-голям космически обект.

Б) Нека означим светимостта и температурата на Слънцето съответно с $L_\odot$ и $T_\odot$, а понижението на температурата, което е необходимо, за да се намали неговата светимост със същия процент – с ΔT. По-нататък можем да напишем

$$L_\odot = 4\pi {R_\odot}^2 \sigma {T_\odot}^4,$$

където σ е константата на Стефан-Болцман. Тогава имаме

$$k = \frac{\Delta L_\odot}{L_\odot} = \frac{4\pi {R_\odot}^2 \sigma {T_\odot}^4 - 4\pi {R_\odot}^2 \sigma (T_\odot - \Delta T)^4}{4\pi {R_\odot}^2 \sigma {T_\odot}^4},$$

$$k = 1 - \left(1 - \frac{\Delta T}{T_\odot}\right)^4,$$

$$\Delta T = T_\odot\left(1 - \sqrt[4]{1-k}\right).$$

Крайният ни резултат е

$$\Delta T \approx \mathbf{6,7\ K}.$$

<u>Критерии за оценяване (общо 12 т.):</u>

А) *За правилен метод за определяне на намаляването на слънчевото греене в резултат от закриването от Церера – **5 т.***
*За верен числен резултат – **1 т.***

Б) *За правилен метод за определяне на необходимото понижение на температурата на Слънцето – **5 т.***
*За верен числен резултат – **1 т.***

Задача 2. Живот в орбита. Международната космическа станция се движи в орбита около Земята на средна височина 400 km над земната повърхност с орбитален период 92 минути. Наклонът на орбитата към равнината на земния екватор е 51,63°. Нека приемем, че орбитата на станцията е кръгова и запазва ориентацията си в пространството (остава успоредна сама на себе си) при движението на Земята около Слънцето. Освен това, в дните на равноденствията орбитата на станцията минава през зенита по пладне за наблюдател на земния екватор.

Вие сте космонавт, на когото предстои да работи на борда на станцията в продължение на една година. Задачата ви е свързана с изследване на Слънцето и за вас е важно то да е достъпно за наблюдение по-дълго време.

- **А)** Определете приблизително колко време ще трае „нощта“ за вас, или времето, през което в рамките на един орбитален период станцията прекосява сянката на Земята около дните на равноденствията. **[6 т.]**
- **Б)** Дали ще е възможно понякога да има интервали от време, по-дълги от един орбитален период на станцията, през които да можете да наблюдавате Слънцето без прекъсване? Ако е възможно, то посочете само качествено кога през годината биха се случвали те. **[6 т.]**

<u>Справочни данни:</u>

Радиус на Земята	$R_E = 6371$ km
Наклон на оста на Земята	$\varepsilon = 23°26'$

Решение.

А) Тъй като от нас се иска да определим само приблизително интервала от време, в който станцията ще прелита през сянката на Земята, то не е необходимо да отчитаме някои несъществени за крайния резултат ефекти. Първият е конусообразната форма на земната сянка и нейното стесняване с отдалечаване от Земята, а вторият е разликата между орбиталния период на движение на станцията около Земята и точния период между две навлизания на станцията в земната сянка. Тази разлика се дължи на движението на Земята около Слънцето и в случая е от порядъка на 1 секунда. Това е несъществено, като се има предвид точността, с която са дадени изходните данни, и още повече, че поради наличието на полусянка, земната сянка няма рязка граница.

В условието е казано, че в дните на равноденствията орбитата на станцията минава през зенита по пладне за наблюдател на земния екватор. Следователно орбитата на станцията минава през зенита и за наблюдател на противоположната точка на земния екватор, където е полунощ. Тогава тези две точки от орбитата на МКС лежат на правата, свързваща центровете на Земята и Слънцето. Това означава, че МКС ще премине през централната линия на земната сянка, т.е. тя ще пресече земната сянка по нейния диаметър.

Както се вижда от схемата, докато МКС пресича земната сянка, тя се завърта на ъгъл β по своята орбита около Земята. Означаваме с R радиуса на Земята и с H височината на орбитата на станцията. За ъгъла α можем да напишем:

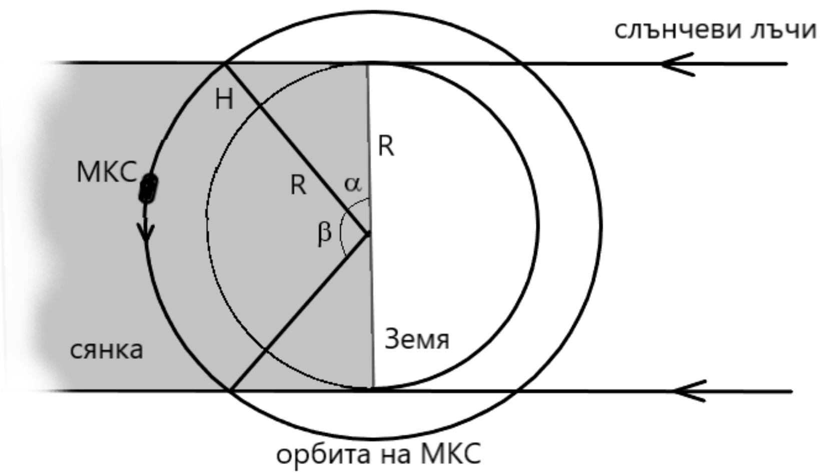
$$\cos\alpha = \frac{R}{R+H},$$
$$\alpha \approx 19{,}79°.$$

Оттук намираме ъгъла β:

$$\beta = 180° - 2\alpha = 140{,}42°.$$

Означаваме с P орбиталния период на станцията. Времето, през което за вас ще е нощ и вие няма да можете да наблюдавате Слънцето, в рамките на един орбитален период, ще бъде:

$$t = \frac{\beta}{360°}\cdot P \approx \mathbf{36\ min}.$$



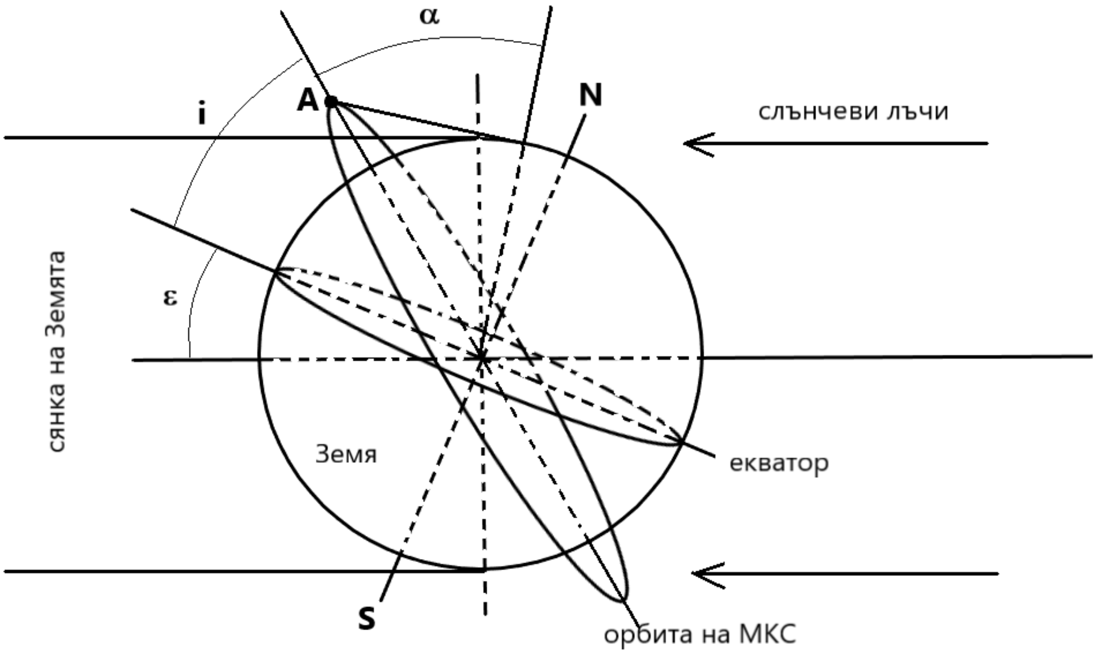
Б) В дните на слънцестоенията наклонът на равнината на орбитата към правата, свързваща центровете на Земята и Слънцето, ще бъде максимален. Тогава би могло да се случи в рамките на един орбитален период станцията да не навлезе в земната сянка. Можем да проверим дали това наистина е възможно.

На фигурата по-долу е представена ситуацията в деня на лятното слънцестоене. Дадена е такава ориентация на орбитата на станцията, при която би могло да се очаква тя да не навлиза в земната сянка. Най-благоприятното за тази цел положение на станцията в този случай е отбелязано с точка A. С $\varepsilon = 23°26'$ е отбелязан наклонът на земния екватор към еклиптиката, с i е означен наклонът на орбитата на станцията към земния екватор. Ъгълът α вече бе пресметнат от нас и представлява ъгъла между посоката от центъра на Земята към МКС и посоката от центъра на Земята към найотдалечената точка от земната повърхност, видима за наблюдател от МКС на хоризонта. Условието станцията да не навлиза в земната сянка е следното:

$$\varepsilon + i + \alpha > 90°.$$

Пресмятаме сумата от тези ъгли и получаваме:

$$\varepsilon + i + \alpha = 94{,}85° > 90°.$$



Следователно около деня на лятното слънцестоене **е възможно** да има интервали от време, по-големи от един орбитален период, през които станцията няма да навлиза в земната сянка и Слънцето ще може да се наблюдава непрекъснато. От схемата също се вижда, че в ситуация около зимното слънцестоене това отново е възможно (тогава слънчевите лъчи идват отляво).

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

А) *За правилна пространствена представа за ситуацията и разбирането, че при равноденствията МКС пресича сянката на Земята по нейния диаметър –* ***3 т.***
За правилни алгебрични пресмятания и верен числен отговор – ***3 т.***

Б) *За правилна пространствена представа за ситуацията, при която може да има интервал от време, по-голям от един орбитален период, без станцията да навлиза в земната сянка –* ***3 т.***
За математическо доказване на твърдението, че това е възможно – ***2 т.***
За посочването на периодите около лятното и зимното слънцестоене като възможни случаи – ***1 т.***

Задача 3. Колонизатори на Плутон. Представете си, че през 2113 г., когато Плутон е в афелий, е изградена термоизолирана база на Плутон, откъдето земните колонизатори успяват да извършват астрономически наблюдения въпреки външната температура от −229°C. Средното разстояние Слънце-Плутон е 39,5 au, а ексцентрицитетът на орбитата на Плутон е 0,25.

- **А)** През коя година колонизаторите за пръв път ще могат да наблюдават Слънцето в перихелий? **[2 т.]**
- **Б)** Колко пъти по-ярко ще бъде Слънцето в перихелий спрямо 2113 г.? **[2 т.]**

- **В)** От 2113 г. до достигането на следващия перихелий колонизаторите на Плутон ще правят множество спектрални наблюдения на Слънцето, измервайки лъчевата му скорост. Каква се очаква да бъде средната стойност (по време) на лъчевата скорост на Слънцето за този времеви интервал? **[2 т.]**
- **Г)** Колонизаторите на Плутон извършват точни астрометрични наблюдения на газовия гигант Нептун и изчисляват, че Плутон се доближава на 2,4 au от орбитата на Нептун, която е с радиус 30,1 au. Колко пъти по-малка би била гравитационната сила, с която Нептун влияе на Плутон от разстояние 2,4 au спрямо гравитационната сила, с която Слънцето влияе на Плутон в перихелий? Масата на Нептун е 19500 пъти по-малка от масата на Слънцето. Застрашава ли Нептун стабилността на орбитата на Плутон? Обосновете отговора си. **[3 т.]**
- **Д)** Коя е първата година след изграждането на базата на Плутон, в която Слънцето ще бъде на 39,5 au от Плутон? **[3 т.]**

Решение.

А) Голямата полуос е равна на на средното разстояние от Слънцето по време $a = 39{,}5$ au. По III закон на Кеплер пресмятаме орбиталния период на Плутон:

$$\frac{a^3}{T^2} = 1.$$

Получаваме период $T = 248$ yr. Времето от афелий до перихелий е $T/2 = 124$ yr. Годината ще е 2113 + 124 = **2237 г.**

Указание. Ако участникът е решил подусловието, знаейки наизуст орбиталния период на Плутон, получава пълния брой точки.

Б) Отношението максимално/минимално разстояние (афелий/перихелий) е

$$\frac{r_A}{r_P} = \frac{a(1+e)}{a(1-e)} = \frac{1{,}25}{0{,}75} = 5/3.$$

Яркостта (лъчистият поток на единица площ) от звезда е пропорционален на $1/r^2$, където r е разстоянието до звездата. Тогава отношението на яркостите в перихелий и в афелий ще бъде $(5/3)^2$ = 25/9 = **2,78** пъти.

В) Средната стойност на лъчевата скорост при промяна на разстоянието Δr от афелий до перихелий за времеви интервал Δt е

$$v_R = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_P - r_A}{(T/2)} = \frac{a(1-e) - a(1+e)}{(T/2)} = -\frac{4ae}{T} = -0{,}76\ \mathrm{km/s}.$$

Г) Според закона за гравитацията силата, с която тяло с маса M привлича тяло с маса m от разстояние r, е

$$F_G = \frac{GMm}{r^2}.$$

Записваме закона за системата Слънце-Плутон в перихелий и за системата Нептун-Плутон от разстояние $r_N = 2{,}4$ au, делим почленно и получаваме отношение на силите

$$\frac{F_S}{F_N} = \frac{M_S}{M_N}\frac{{r_N}^2}{{r_P}^2} = (19500)\left(\frac{2{,}4}{29{,}625}\right)^2 \approx \mathbf{130}.$$

Тоест силата, с която Нептун би привличал Плутон от най-близката точка по орбитата си, би била около 1% от силата, с която Слънцето привлича Плутон, което би имало сериозен ефект. В действителност, обаче, Нептун и Плутон никога не са толкова близо един до друг. Силата от Нептун е на порядък по-малка, но все пак значима, обаче в обратната посока – тя стабилизира орбитата на Плутон. От III закон на Кеплер може да пресметнем, че Плутон и Нептун са в орбитален резонанс 3:2:

$$\frac{T}{T_N} = \left(\frac{a}{a_N}\right)^{3/2} = \left(\frac{39{,}5}{30{,}1}\right)^{3/2} \approx 1{,}5.$$

Дългосрочно орбитата на Плутон се мени около сегашните си параметри – с период ту малко над, ту малко под 3/2 от периода на Нептун (който е много по-масивното и стабилно тяло). Поради това, когато Плутон е около перихелий, Нептун е в отсрещната част на орбитата си, на различно място, но разстоянието между двете планети не става под 18 au. Плутон е най-големият обект от *плутинотата* – група транснептунови обекти в среден резонанс 3:2 с Нептун. Други големи плутинота са Оркус (също планета-джудже) и Иксион.

Д) Плутон ще е на разстояние 39,5 au от Слънцето (равно на голямата полуос), когато пресича малката полуос на орбитата си. От афелий до тази точка отсечката Слънце-Плутон ще опише площ

$$S = \frac{1}{4}\pi ab + \frac{1}{2}eab.$$

По II закон на Кеплер намираме времето t за описване на тази площ:

$$\frac{S}{\pi ab} = \frac{t}{T}.$$

Заместваме и получаваме

$$t = T\left(\frac{1}{4} + \frac{e}{2\pi}\right) = 0{,}29T = 72{,}0 \text{ yr.}$$

Първата година, в която Слънцето ще бъде на 39,5 au от Плутон ще е 2113 + 72 = **2185 г.**

<u>*Критерии за оценяване (общо 12 т.):*</u>

А) *Общо –* ***2 т.***
Б) *Общо –* ***2 т.***
В) *Общо –* ***2 т.***
Г) *Общо –* ***3 т.***
Д) *Общо –* ***3 т.***

Задача 4. От нищо – нещо. Ефективната температура на повърхността на Слънцето е $T = 5770$ K. Видимият му ъглов диаметър е $\delta = 32'$.

- **А)** Ако е известно, че оранжевият гигант (спектрален клас K2III) Арктур има видима болометрична звездна величина $m' = -0{,}1$, оценете видимия ъглов диаметър на тази звезда за наблюдател на Земята. Видимата болометрична звездна величина на Слънцето е $m = -26{,}8$. **[4 т.]**
- **Б)** Албедото на Земята е $A = 0{,}30$. Оценете средната температура на земната повърхност. Не отчитайте влиянието на земната атмосфера. **[4 т.]**
- **В)** Оценете повърхностната яркост (звездната величина на една квадратна дъгова секунда) на хипотетична галактика, състояща се от подобни на Слънцето звезди, чиито дискове покриват 10^{-12} част от видимата ъглова площ на галактиката. Видимата звездна величина на Слънцето е $m = -26{,}8$. **[4 т.]**

Решение.

А) Ако една звезда има светимост L, то на разстояние r от нея тя създава осветеност

$$E = \frac{L}{4\pi r^2}.$$

Ако означим с T ефективната температура на звездата, а с R нейния радиус, то

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4.$$

Оттук получаваме, че

$$E = \frac{4\pi R^2 \sigma T^4}{4\pi r^2} = \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sigma T^4 = \left(\frac{\delta[\mathrm{rad}]}{2}\right)^2 \sigma T^4, \qquad (1)$$

където δ е видимият ъглов диаметър на звездата.

Нека E и E' да са осветеностите, които Слънцето и Арктур създават за земния наблюдател. Съгласно закона на Погсън

$$\frac{E}{E'} = 10^{0,4(m'-m)}.$$

Звездата Арктур е от спектрален клас К. Съответно можем да предположим, че нейната температура T' е приблизително равна на 4000 К.

<u>*Забележка.*</u> Точната стойност е 4290 К, но такава точност не се изисква от учениците. Ако използваната стойност е между 3500 К и 5000 К, следва да не се отнемат точки.

Ако δ' е видимият ъглов диаметър на Арктур, то от равенство (1) следва, че:

$$\frac{E}{E'} = \left(\frac{\delta}{\delta'}\right)^2 \left(\frac{T}{T'}\right)^4.$$

Оттук достигаме до резултата

$$\delta' = \delta \left(\frac{T}{T'}\right)^2 \sqrt{\frac{E'}{E}} \approx \mathbf{0,018''}.$$

Допустимите стойности за δ', в зависимост от това каква стойност за температурата на Арктур е използвана, са между $0{,}012''$ и $0{,}024''$.

Б) Ще използваме равенство (1) от предишното подусловие. Ако R е радиусът на Земята, то енергията, която нашата планета получава от Слънцето за единица време (лъчистият поток), е

$$\Phi = E\pi R^2 = \left(\frac{\delta[\mathrm{rad}]}{2}\right)^2 \sigma T^4 \pi R^2.$$

Албедото показва каква част от тази енергия се разсейва. Следователно попадащата върху Земята за единица време слънчева енергия, която отговаря за нагряването на нашата планета, е

$$(1-A)\Phi = (1-A)\left(\frac{\delta[\mathrm{rad}]}{2}\right)^2 \sigma T^4 \pi R^2.$$

В разглежданата ситуация нашата планета ще се нагрява, докато не достигне някаква равновесна температура T_E. При тази температура електромагнитната енергия, която Земята излъчва от цялата си повърхност, ще се изравни със слънчевата енергия, която я нагрява. Затова е в сила е следното равенство:

$$(1-A)\left(\frac{\delta[\mathrm{rad}]}{2}\right)^2 \sigma T^4 \pi R^2 = \sigma T_E^4 4\pi R^2.$$

Оттук получаваме

$$T_E = \frac{T}{2}\sqrt{\delta[\mathrm{rad}]}(1-A)^{1/4} \approx \mathbf{255\ K}.$$

В) Нека да изразим осветеността, която се създава от единица ъглова площ от диска на звезда с температура T. Ъгловата площ на диска на звезда можем да дефинираме като

$$\Omega = \frac{\pi\delta[\mathrm{rad}]^2}{4}.$$

В комбинация с уравнение (1) това ни дава

$$\frac{E}{\Omega} = \frac{\sigma T^4}{\pi}.$$

Изводът е, че тази величина зависи само от температурата на звездата. Това означава, че ако видимият диск на галактиката е изпълнен изцяло с подобни на Слънцето звезди (т.е. имащи температура, равна на температурата на Слънцето), то повърхностната яркост, която търсим, би била равна на звездната величина μ, която има една квадратна дъгова секунда от слънчевия диск.

Нека да пресметнем стойността на μ. Първо намираме ъгловата площ на Слънцето в квадратни дъгови секунди:

$$\Omega = \frac{\pi\delta^2}{4} \approx 2{,}90.10^6\ \mathrm{arcsec}^2.$$

Като знаем, че звездната величина на целия слънчев диск е m, използвайки закона на Погсън, получаваме, че звездната величина, която съответства на 1 arcsec^2, е:

$$\mu = m + 2{,}5\lg(\Omega\ [\mathrm{arcsec}^2]) = -10{,}65\ \mathrm{mag/arcsec}^2.$$

В условието на задачата е казано, че дисковете на звездите покриват 10^{-12} от видимата ъглова площ на галактиката. Следователно една квадратна дъгова секунда от тази галактика създава 10^{12} пъти по-малка осветеност от същата ъглова площ от слънчевия диск. Така търсената повърхностна яркост на галактиката е:

$$\mu' = \mu + 2{,}5\lg(10^{12}) = \mathbf{19{,}35\ mag/arcsec^2}.$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

А) *За правилно математическо изразяване на осветеността чрез видим ъглов диаметър и температура –* ***2 т.***
За достоверна стойност на температурата на Арктур – ***0,5 т.***
За правилни математически преобразования и правилен краен израз за видимия ъглов диаметър на Арктур – ***1 т.***
За верен числен резултат – ***0,5 т.***

Б) *За правилно изразяване на слънчевата енергия, която попада за единица време върху Земята –* ***1 т.***
За правилно изразяване на слънчевата енергия, която се поглъща – ***0,5 т.***
За правилни разсъждения относно температурата, до която Земята ще се нагрее, и верен израз – ***2 т.***
За верен числен резултат – ***0,5 т.***

В) *За доказване на това, че осветеността от единица ъглова площ зависи само от температурата на звездата –* ***2 т.***
За правилно изразяване на повърхностната яркост на слънчевия диск – ***1 т.***
За правилно изразяване на повърхностната яркост на диска на галактиката и верен числен отговор – ***1 т.***

Задача 5. Земята зад завеса. Пръстен B на Сатурн е най-яркият и най-впечатляващ измежду всичките пръстени на планетата. Той има вътрешен радиус $r_{\text{in}} = 90\,000\ \text{km}$ и външен радиус $r_{\text{out}} = 120\,000\ \text{km}$. Частиците в пръстена имат характерен размер $d = 1\ \text{m}$ и са изградени от воден лед с плътност $\rho = 900\ \text{kg/m}^3$. Общата им маса се оценява на $m = 1{,}5.10^{19}\ \text{kg}$.

Нова мисия към Сатурн прави изненадващо откритие – навсякъде по повърхността на Сатурн се реят газообразни любители на астрономията! Една от любимите им гледки е когато планетата Земя попадне зад пръстен B.

- **А)** Каква е най-северната планетографска ширина $\varphi_{\max}$, гледано от която Земята може да се скрие зад пръстена? **[3 т.]**

Извънземните правят наблюдения от фиксиран паралел, лежащ съвсем малко по на юг от ширината $\varphi_{\max}$.

- **Б)** Оценете нарастването Δm на болометричната звездна величина на Земята за такива наблюдатели, когато Земята попадне зад пръстена. **[4 т.]**

В някакъв момент Земята се намира в максимална елонгация, гледано от Сатурн, при което същите наблюдатели могат да я видят зад пръстена отнякъде по паралела едва в продължение на 2-3 дни. Тази гледка отново става достъпна за по няколко дни след определени периоди от време Δt_1 и Δt_2, които са по-кратки от една земна година.

- **В)** Дайте отговор дали максималната елонгация, гледано от Сатурн, е източна или западна. Как се нарича конфигурацията, в която Сатурн се намира, гледано от Земята в същия момент? **[1 т.]**
- **Г)** Намерете Δt_1 и Δt_2. **[4 т.]**

Приемете Сатурн за сфера с радиус $R = 60\,000\ \text{km}$. Орбитата на Сатурн следва да се приеме за кръгова и лежаща в равнината на еклиптиката.

Упътване:

Ако не можете да получите смислен резултат в **Б)**, решете същата задача във вариант, където масата в пръстена е $m = 1{,}5.10^{17}\ \text{kg}$, а останалите величини остават непроменени. Тогава за подточката може да получите максимум **[3 т.]**.

Решаването на последната част трябва да стане числено или графично. Можете да опростите пресмятанията си, като приемете движението на Сатурн в рамките на търсените интервали от време за равномерно и праволинейно.

Справочни данни:

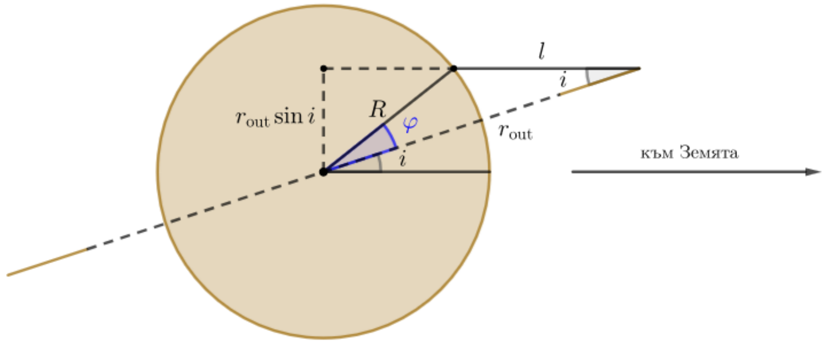
Радиус на орбитата на Сатурн	$r_S = 9{,}58\ \text{au}$
Наклон на оста на Сатурн	$\varepsilon = 26°44'$

Решение.

А) Направлението от Сатурн към Земята може да сключва всякакви ъгли i спрямо равнината на пръстените, като i е между $0°$ и $\varepsilon = 26°44'$. Да разгледаме областите от Сатурн, където пръстените закриват Земята. Тъй като търсим най-северната възможна ширина, правим чертежа си в равнина, която е перпендикулярна на тази на пръстените и същевременно съдържа центровете на Земята и Сатурн.

Става ясно, че максималната ширина φ, където може да се наблюдава закриване, нараства при нарастване на i. Това е така, защото $\frac{R}{\sin i} = \frac{l}{\sin \varphi}$. Когато i расте, l също се увеличава, което налага и φ да расте, така че равенството да остава вярно. Затова оптималният случай е $i = \varepsilon$. При този случай записваме

$$\sin(\varphi_{\max} + \varepsilon) = \frac{r_{\text{out}} \sin \varepsilon}{R} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\max} = \arcsin\left(\frac{r_{\text{out}} \sin \varepsilon}{R}\right) - \varepsilon = \mathbf{+37,4°}.$$



Б) Нека дебелината на пръстена е h, а концентрацията на частици в пръстена е n (мерната единица на тази величина е $[\mathrm{m}^{-3}]$). Приемайки условно частиците от пръстена за сферични, общата им маса ще се задава с

$$m = n\pi(r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2)h\left(\frac{\rho\pi d^3}{6}\right).$$

Сега ще намерим оптичната дебелина τ на слоя частици, през който гледаме Земята. Тя се задава с $\tau = \sigma n L$, където L е дължината на слоя, а σ е напречното сечение на поглъщане за частиците. Ако частиците са големи, σ се явява просто геометричното им напречно сечение. И така, отчитайки, че гледаме през пръстена под ъгъл ε, имаме

$$\tau = n\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)\left(\frac{h}{\sin \varepsilon}\right) = \frac{3m}{2\pi\rho d(r_{\text{out}}^2 - r_{\text{in}}^2)\sin \varepsilon} = 2{,}8.$$

Относителният спад в потока поради поглъщането е $\Phi/\Phi_0 = e^{-\tau}$, така че

$$\Delta m = -2{,}5 \lg e^{-\tau} = \frac{2{,}5\tau}{\ln 10} \approx \mathbf{3}.$$

Забележка. Решението с оптична дебелина отчита, че частиците от пръстена могат да се налагат една върху друга, гледано от наблюдателя. Ако не вземем това предвид, бихме получили безсмислен резултат. Ако масата на пръстена обаче беше 100 пъти по-малка, частиците му ще бъдат доста по-нарядко. Тогава е позволено да направим по-проста оценка, като пренебрегнем застъпването на частиците. Да видим каква геометрична площ ледени частици се наслагва на фона на земния диск с площ πR_E^2. В цилиндър с основа πR_E^2 и височина $(h/\sin\varepsilon)$ се съдържат общо $n\pi R_E^2(h/\sin\varepsilon)$ частици, всяка с площ $(\pi d^2/4)$. Отношението на незакритата площ на земния диск към пълната му площ тогава става

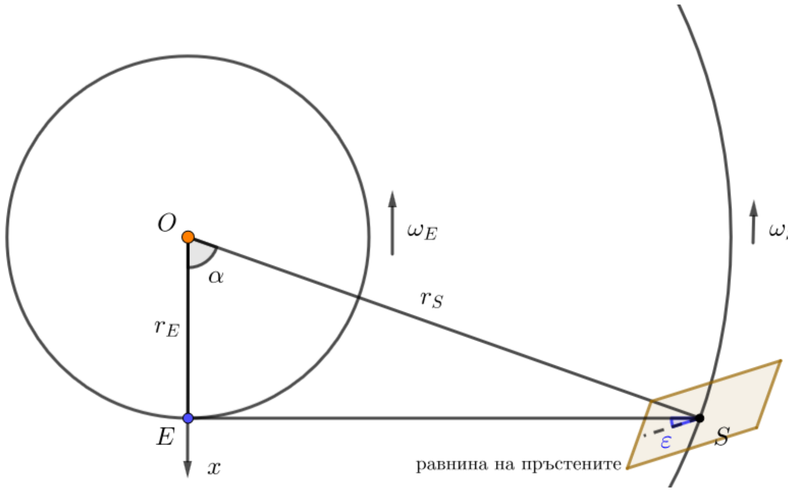
$$1 - n\left(\frac{\pi d^2}{4}\right)\left(\frac{h}{\sin \varepsilon}\right) = 1 - \tau,$$

при което за нарастването на звездната величина получаваме

$$\Delta m = -2{,}5 \lg(1 - \tau) = 0{,}03.$$

В) Както е показано по-нататък, отговорите са съответно **максимална източна елонгация** и **западна квадратура**.

Г) Причината Земята да може да се закрива от пръстените само за кратко на паралела ни е, че това би изисквало наклон на равнината на пръстените спрямо лъча към Земята, равен на почти точно ε. В постановката на тази задача ситуацията при максимална елонгация е именно такава.



Но ориентацията на равнината на пръстените в пространството е фиксирана, докато тази на лъча към Земята не е. Условието Земята да може да се закрива е лъчът към нея да се оказва успореден на отсечката ES от чертежа при максимална елонгация.

За да намерим кога това се изпълнява, въвеждаме координатна ос x с начало при Слънцето, както е показано. Сега търсим моментите в рамките на следващата година, когато E и S имат еднаква x координата. Ако моментът $t = 0$ съответства на максималната елонгация, за Земята и Сатурн съответно можем да запишем

$$x_E = r_E \cos(\omega_E t), \qquad x_S = r_E - v_S t,$$

където ω означава ъглова скорост, а v означава линейна орбитална скорост. Преобразуваме израза за x_S както следва:

$$x_S = r_E\left(1 - \frac{v_S}{r_E}t\right) = r_E\left(1 - \frac{v_S}{v_E}\frac{v_E}{r_E}t\right) = r_E\left(1 - \sqrt{\frac{r_E}{r_S}}\,\omega_E t\right).$$

Полагаме $\omega_E t \equiv \theta$ и целим да решим уравнението

$$\cos\theta = 1 - \sqrt{\frac{r_E}{r_S}}\,\theta = 1 - 0{,}32\theta.$$

То може да се реши графично чрез пресичане на графиките на косинус и права линия, или числено след няколко проби. Двете му решения при $\theta < 2\pi$ са $\theta_1 = 0{,}67$ rad и $\theta_2 = 4{,}31$ rad. И тъй като земната година съответства на 2π rad, достигаме до

$$\Delta t_1 = \mathbf{39\ d}, \qquad \Delta t_2 = \mathbf{251\ d}.$$

Стойностите, получени при решаване без приближения, се различават само с ден.

<u>Критерии за оценяване (общо 12 т.):</u>

А) *За правилна геометрична постановка на закриването от пръстените –* ***1 т.***
За указване на оптималния случай – ***1 т.*** *(без доказателство –* ***0,5 т.****)*
За пресмятания и верен числен резултат – ***1 т.***

Б) *За формула за масата, от която се изразява произведението nh –* ***1 т.***
За изразяване на оптичната дебелина – ***1,5 т.*** *(ако няма $\sin\varepsilon$ –* ***0,5 т.****)*
За изразяване на промяната в звездната величина и числен резултат – ***1,5 т.***
(При алтернативното решение за „лек пръстен" – до ***3 т.****)*

В) *За два верни отговора –* ***1 т.*** *(само един верен отговор –* ***0 т.****)*

Г) *За разбиране на явлението и геометрична постановка –* ***2 т.***
За достигане до уравнение в удобен вид – ***1 т.***
За решаване на уравнението и крайни отговори – ***1 т.***