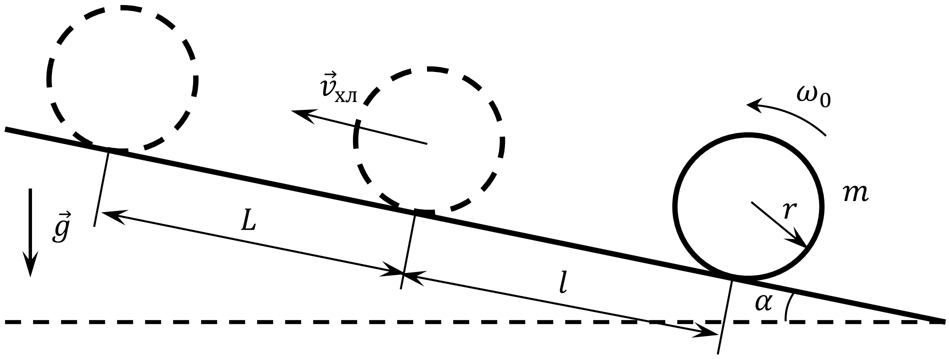
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ПРОЛЕТНО НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
5 МАРТ 2023 г., ВАРНА
Решения на Специална тема (седма възрастова група)

Задача 1. **Търкалящо се тяло по наклонена равнина.**



а) За да тръгне тялото нагоре, трябва силата на триене $F_{тр} > mg\sin\alpha$. Тъй като $F_{тр} = \mu R$, а реакцията на опората $R = mg\cos\alpha$, то $\mu mg\cos\alpha > mg\sin\alpha$, откъдето $\mu > \tan\alpha$ или $n > 1$. **[0.5 т.]**

б) $F_{тр} - mg\sin\alpha = ma_{хл}$, откъдето $a_{хл} = \mu g\cos\alpha - g\sin\alpha = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = g\sin\alpha\,(n-1)$. **[0.5 т.]**

в) Хлъзгането ще изчезне, когато линейната скорост v на центъра на масата на тялото и неговата ъглова скорост ω са свързани така: $v = \omega r$. **[0.2 т.]** Линейната скорост нараства така: $v = a_{хл}.t$, **[0.2 т.]** а ъгловата скорост ω намалява така: $\omega = \omega_0 - \varepsilon t$, **[0.2 т.]** където ъгловото ускорение $\varepsilon = \frac{F_{тр}.r}{I}$. **[0.2 т.]** Следователно $a_{хл}.t_{хл} = (\omega_0 - \varepsilon t_{хл})r$. **[0.2 т.]** Така $t_{хл} = \frac{\omega_0 r}{a_{хл}+\varepsilon r} = \frac{\omega_0 r}{g\sin\alpha(n-1)+\frac{\mu mg\cos\alpha.r}{kmr^2}r}$,

$t_{хл} = \frac{\omega_0 r}{g\sin\alpha(n-1)+\frac{\mu g\cos\alpha}{k}} = \frac{\omega_0 r}{g\sin\alpha(n-1)+\frac{ng\sin\alpha}{k}}$. $t_{хл} = \frac{\omega_0 r}{g\sin\alpha\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]}$ **[1.0 т.]**

г) Скоростта $v_{хл}$ в момента, когато хлъзгането изчезне, е $v_{хл} = a_{хл}.t_{хл}$.

$v_{хл} = g\sin\alpha\,(n-1)\frac{\omega_0 r}{g\sin\alpha\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]} = \frac{\omega_0 r(n-1)}{n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1} = \frac{\omega_0 r(n-1)}{n-1+\frac{n}{k}} = \frac{\omega_0 r}{1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}}$. **[0.5 т.]**

д) Докато се хлъзга, тялото ще измине път $l = \frac{1}{2}a_{хл}t_{хл}{}^2$, $l = \frac{g\sin\alpha(n-1)(\omega_0 r)^2}{2(g\sin\alpha)^2\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2}$,

$l = \frac{(\omega_0 r)^2(n-1)}{2g\sin\alpha\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2}$. **[0.5 т.]**

е) За да бъде пътят l максимален, функцията $f(n) = \frac{n-1}{\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2}$, зависеща от n, трябва да има максимум. **[0.2 т.]** Тогава първата ѝ производна трябва да е нула. $\frac{df}{dn} = \frac{1.\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2-(n-1).2.\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]\left(1+\frac{1}{k}\right).}{\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^4} = 0$, **[0.8 т.]** откъдето $\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]-(n-1).2.\left(1+\frac{1}{k}\right) = 0$. **[0.2 т.]** След опростяване $n = 2-\frac{1}{1+\frac{1}{k}}$. **[0.3 т.]** Замествайки във формулата за пътя $l = \frac{(\omega_0 r)^2\left(2-\frac{1}{1+\frac{1}{k}}-1\right)}{2g\sin\alpha\left[(2-\frac{1}{1+\frac{1}{k}})\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2} = \frac{(\omega_0 r)^2}{2g\sin\alpha}\frac{k^2}{4(k+1)}$. **[1.0 т.]**

ж) След изчезването на хлъзгането механичната енергия на тялото се запазва. Затова приравнявайки тази енергия в положението, когато хлъзгането изчезва, с положението, когато тялото е спряло в най-високата точка на движението си, $\frac{(kmr^2+mr^2){\omega_{\text{хл}}}^2}{2} = mgL\sin\alpha$ **[0.5 т.]** и замествайки $\omega_{\text{хл}} = \frac{v_{\text{хл}}}{r}$, $L = \frac{(k+1)r^2{\omega_0}^2}{2g\sin\alpha\left[1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]^2}$. **[1.0 т.]**

з) Ускорението $a_{\text{безхл}} = \frac{{v_{\text{хл}}}^2}{2L}$, които вече са изчислени. $a_{\text{безхл}} = \frac{\left[\frac{\omega_0 r}{1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}}\right]^2}{2\frac{(k+1)r^2{\omega_0}^2}{2g\sin\alpha\left[1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]^2}} = \frac{g\sin\alpha}{k+1}$.

[0.5 т.]

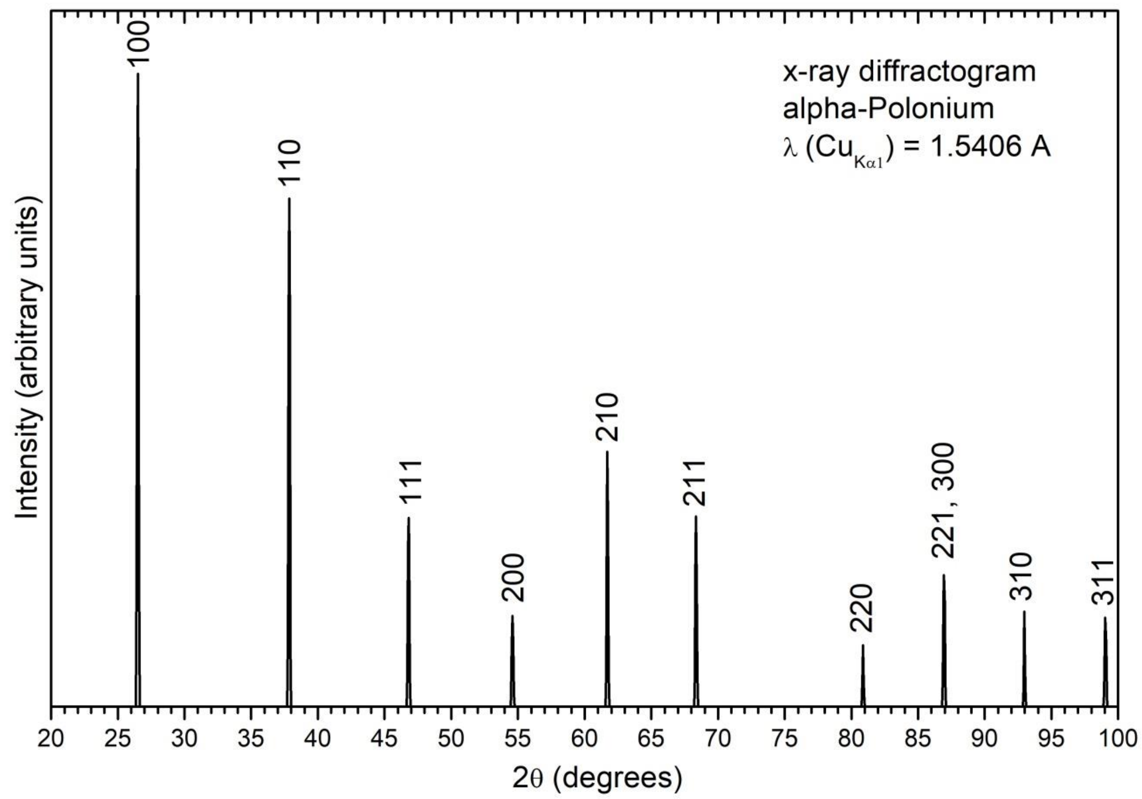
и) Началната енергия е $E_0 = \frac{kmr^2{\omega_0}^2}{2}$. Енергията $E_{\text{кр}}$ в момента, когато хлъзгането изчезва, е $E_{\text{кр}} = \frac{(kmr^2+mr^2){\omega_{\text{хл}}}^2}{2} + mgl\sin\alpha$. Замествайки с получените $\omega_{\text{хл}}$ и l, $\frac{E_{\text{кр}}}{E_0} = \frac{\frac{(kmr^2+mr^2){\omega_{\text{хл}}}^2}{2}+mgl\sin\alpha}{\frac{kmr^2{\omega_0}^2}{2}} = \frac{\frac{(kmr^2+mr^2)\left[\frac{\omega_0 r}{1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}}\right]^2}{2}+mg\sin\alpha\frac{(\omega_0 r)^2(n-1)}{2g\sin\alpha\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2}}{\frac{kmr^2{\omega_0}^2}{2}}$. **[0.4 т.]** След съкращаване $\frac{E_{\text{кр}}}{E_0} = \frac{k+1}{k\left[1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}\right]^2} + \frac{n-1}{k\left[n\left(1+\frac{1}{k}\right)-1\right]^2}$. **[0.2 т.]** След опростяване $\frac{E_{\text{кр}}}{E_0} = \frac{1}{1+\frac{1}{k\left(1-\frac{1}{n}\right)}}$. **[0.6 т.]** Максималната стойност на отношението се получава при $n \to \infty$, $\frac{E_{\text{кр}}}{E_0}_{max} = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$. **[0.3 т.]**

<u>Задача 2.</u> Рентгенова прахова дифрактометрия.

а) От необходимото условие за наблюдаване на дифракционен максимум следва, че при нарастване на ъгъла 2θ в дифрактограмата максимумите ще се наредят по нарастване на стойността на $\sqrt{h^2+k^2+l^2}$ (или $h^2+k^2+l^2$, чието използване е по-добро, защото е цяло число). **[0.2 т.]** Нека изследваме възможните комбинации (без техните пермутации, които дават същото число) и да ги наредим по нарастване на $h^2+k^2+l^2$ (виж таблицата)

hkl	$h^2+k^2+l^2$	hkl	$h^2+k^2+l^2$	hkl	$h^2+k^2+l^2$	hkl	$h^2+k^2+l^2$	hkl	$h^2+k^2+l^2$
100	1	310	10	411	18	510	26	433	34
110	2	311	11	331	19	333	27	530	34
111	3	222	12	420	20	511	27	531	35
200	4	320	13	421	21	432	29	442	36
210	5	321	14	332	22	520	29	600	36
211	6	400	16	422	24	521	30	610	37
220	8	322	17	430	25	440	32	532	38
221	9	410	17	500	25	441	33	611	38
300	9	330	18	431	26	522	33	620	40

Прави впечатление, че за стойности на $h^2+k^2+l^2$ липсват числата 7, 15, 23, 28, 31 и 39. Използвайки тази таблица, индексираме наблюдаваните максимуми в дифрактограмата на алфа-полония (виж фигурата по-долу). **[0.8 т.]**

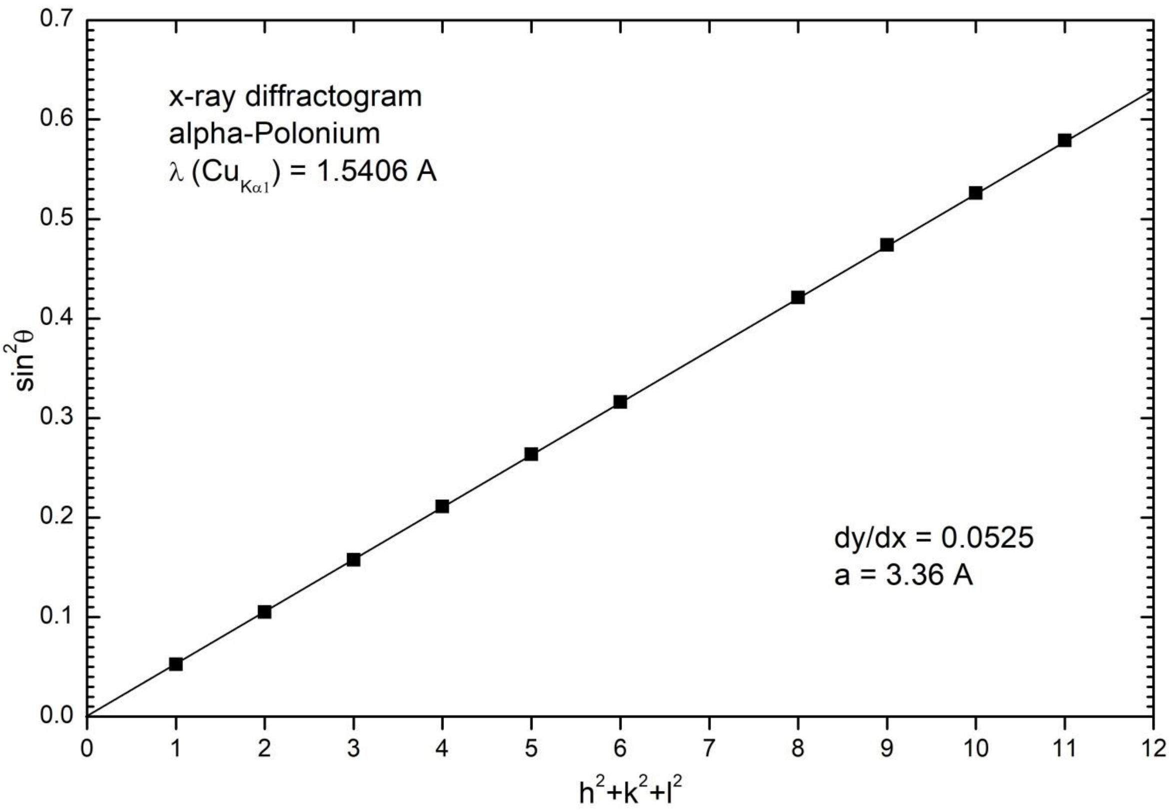


б) от дадената формула, получаваме, че $(\sin\theta_{hkl})^2 = \left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2 (h^2 + k^2 + l^2)$, т.е ако се чертае зависимостта на $(\sin\theta_{hkl})^2$ от $h^2 + k^2 + l^2$, ще се получи пропорционалност с наклон $\left(\frac{\lambda}{2a}\right)^2$. **[0.3 т.]** От дадената дифрактограма измерваме ъглите, при които се наблюдават дифракционните максимуми и табулираме зависимостта (виж таблицата). **[0.7 т.]** Построяваме графиката на тази зависимост (виж фигурата по-долу). **[1.0 т.]** От нея определяме наклона на пропорционалността $\frac{dy}{dx} = 0{,}0525$. **[0.3 т.]** След това изчисляваме $a_{\mathrm{Po}} = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{dy}{dx}}} = 3{,}36$ Å. **[0.4 т.]**

hkl	$2\theta_{hkl}$	$(\sin\theta_{hkl})^2$	$h^2 + k^2 + l^2$
100	26.5	0.0525	1
110	37.8	0.1049	2
111	46.8	0.1577	3
200	54.7	0.2111	4
210	61.8	0.2637	5
211	68.4	0.3159	6
220	80.9	0.4209	8
221, 300	87.0	0.4738	9
310	93.0	0.5262	10
311	99.1	0.5791	11

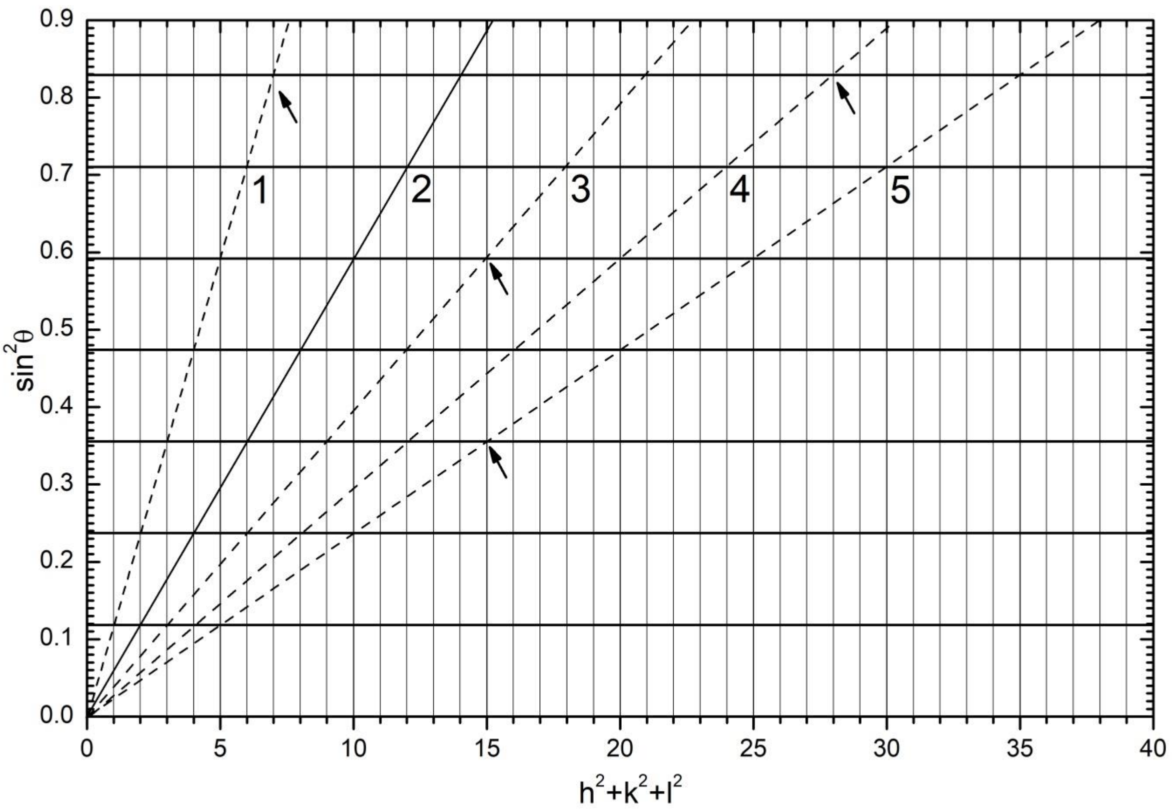
в) Плътността на алфа-полония е равна на плътността на едно кубче от кристалната структура $\rho_{\alpha-\mathrm{Po}} = \frac{m_{\mathrm{Po}}}{a^3} = \frac{209.1{,}66.10^{-27}\mathrm{kg}}{(3{,}36.10^{-10}\mathrm{m})} \approx 9\ 150\ \mathrm{kg/m^3}$ **[0.3 т.]**

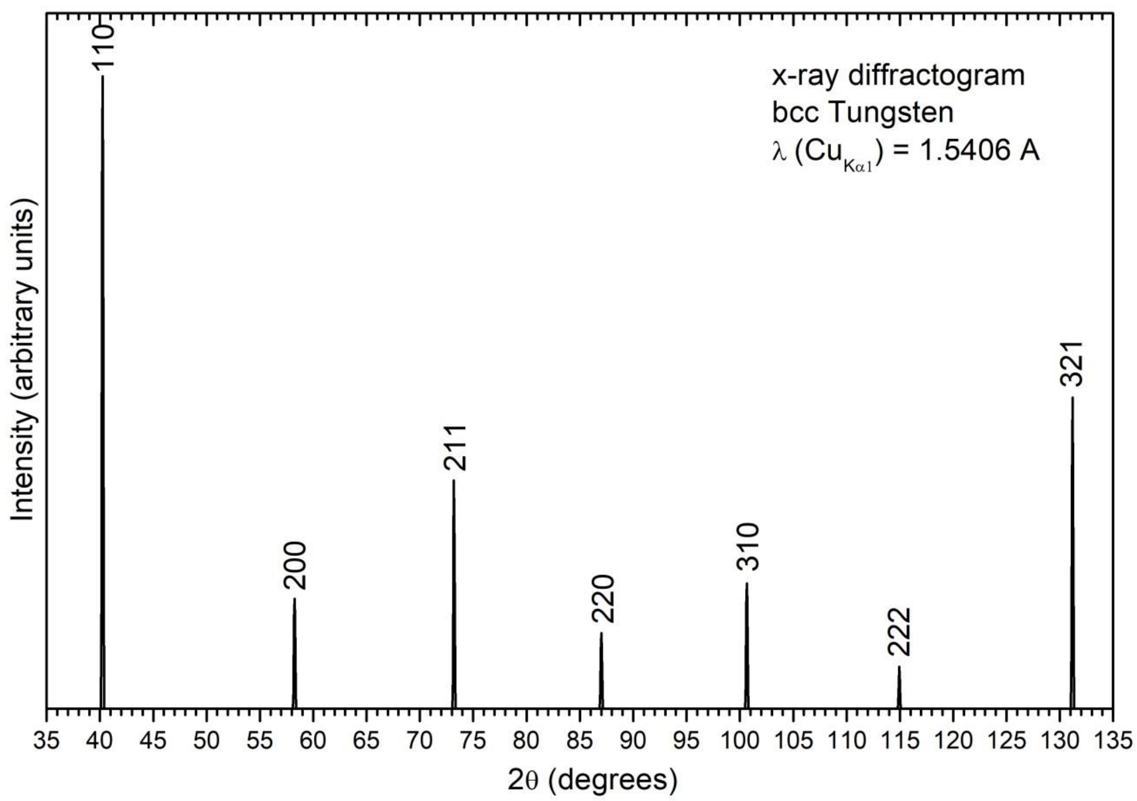
г) В този случай максимумите в дифрактограмата пак ще се наредят по нарастване на стойността на $h^2 + k^2 + l^2$, само че не е ясно кои максимуми ще липсват. Единственото сигурно е, че на всеки максимум ще съответства $h^2 + k^2 + l^2$ – цяло число и че зависимостта $(\sin\theta_{hkl})^2$ от $h^2 + k^2 + l^2$ пак ще бъде пропорционалност. Затова от дадената дифрактограма измерваме ъглите, при които се наблюдават дифракционните максимуми и табулираме зависимостта (виж първите две колони на таблицата). **[0.4 т.]**



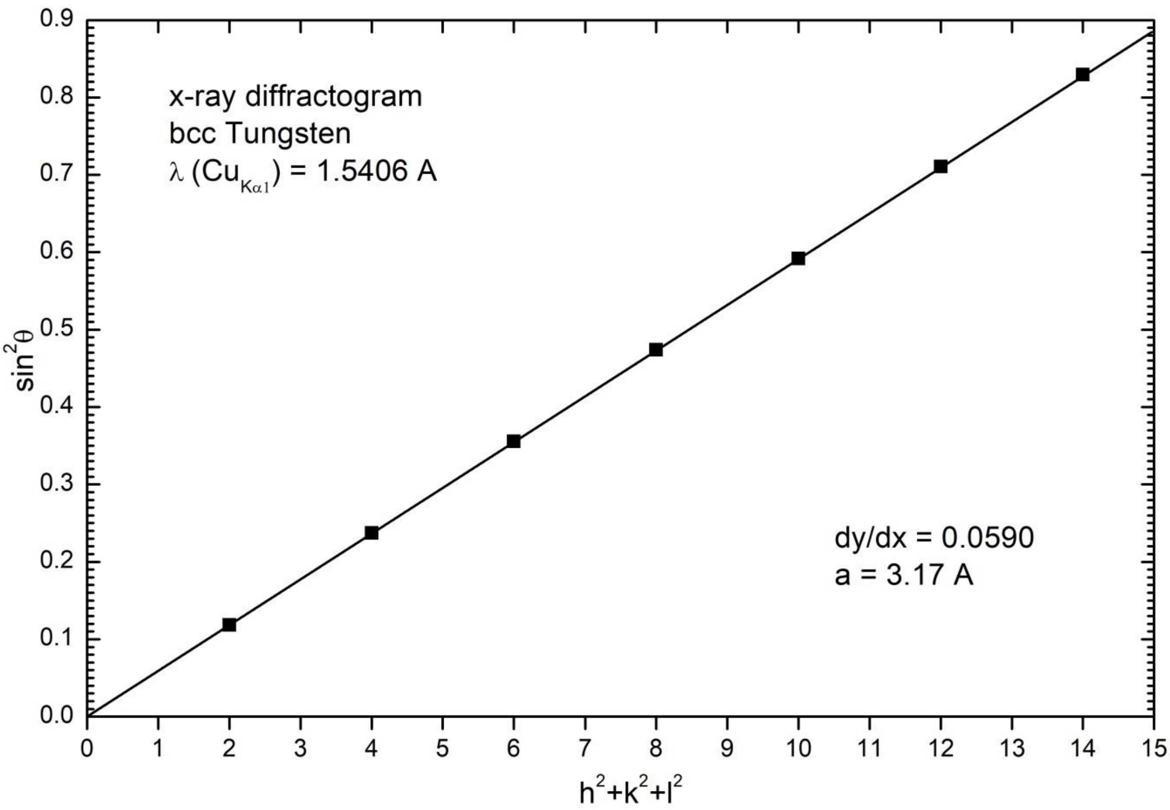
$2\theta_{hkl}$	$(\sin\theta_{hkl})^2$	$h^2+k^2+l^2$	hkl
40.3	0.1187	2	110
58.3	0.2373	4	200
73.2	0.3555	6	211
87.0	0.4738	8	220
100.6	0.5920	10	310
114.9	0.7105	12	222
131.2	0.8293	14	321

След това чертаем графика с вертикални линии цели числа и с хоризонтални линии – стойностите на $(\sin\theta_{hkl})^2$ (виж фигурата). Търсената пропорционалност трябва да минава през пресечни точки на тази мрежа, които лежат на една права, минаваща през точката (0,0). Чертаем първите пет възможни прави. **[0.4 т.]** Не е нужно да чертаем повече, защото от тях ще изчислим параметър на решетката $a_{\mathrm{W}} > 5{,}00$ Å. **[0.4 т.]** От тези 5 прави линии 4 (правите, отбелязани с 1, 3, 4, и 5) са невъзможни, защото предсказват максимуми, за които $h^2+k^2+l^2$ е 7, 15 или 28 (отбелязани на фигурата със стрелки), което е невъзможно. **[0.4 т.]** Остава единствената възможност права 2. **[0.4 т.]** От нея намираме стойностите на $h^2+k^2+l^2$ (табулирани в третата колона на таблицата). След това намираме възможните стойности на h, k, l за тези стойности на $h^2+k^2+l^2$ (табулирани в четвъртата колона на таблицата) и ги отбелязваме на дифрактограмата (виж фигурата по-долу). **[0.4 т.]** Изследвайки какви числа са hkl стигаме до извода, че математическото правило на подбор, на което се подчиняват числата в индексите на наблюдаваните максимуми, е „разрешени са само тези максимуми hkl, за които сумата $h+k+l$ е четно число“. **[0.6 т.]**





д) Построяваме графика на зависимостта $(\sin \theta_{hkl})^2$ от $h^2 + k^2 + l^2$ (виж фигурата). **[1.4 т.]**



От нея определяме наклона на пропорционалността $\frac{dy}{dx} = 0{,}0590$. **[0.5 т.]** След това изчисляваме $a_\mathrm{W} = \frac{\lambda}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{dy}{dx}}} = 3{,}17$ Å. **[0.5 т.]**

е) Плътността на волфрама е равна на плътността на едно кубче от кристалната структура (то съдържа 2 атома!) $\rho_W = \frac{2m_\mathrm{W}}{a^3} = \frac{2.183{,}84.1{,}66.10^{-27}\mathrm{kg}}{(3{,}17.10^{-10}\mathrm{m})} \approx 19\ 200\ \mathrm{kg/m^3}$ **[0.6 т.]**

<u>Задача 3.</u> Фазова диаграма на водата.

Използвайки диаграмата, дадена по-долу, намираме:

а) Вода кипи в плътно затворена тенджера под налягане. Температурата на водата е 150 °C. Налягането в тенджерата ще бъде 5 bar **[1.5 т.]**

б) В стъклен прозрачен цилиндър, затворен с бутало, е налята вода. Буталото се издърпва, така че да се увеличи затворения обем, при което се понижава налягането на водните пари вътре в цилиндъра. Налягането в цилиндъра, при което ще се наблюдава кипене на водата при 25 °C е 30 mbar. **[1.5 т.]**

в) Водата може да съществува в твърдо състояние при 250 °C при минимално налягане 60 kbar. **[2 т.]**

г) Минималната температура, при която водата може да съществува в течно състояние, е 251 K. (−22 °C) **[1 т.]**

д) Кубче лед се пуска в напълно вакуумиран цилиндър. Температурата на цилиндъра се поддържа -50 °C. Част от леда сублимира. Установеното налягане на парите на водата при тази температура е 5 Pa. **[2 т.]**

е) На диаграмата при $p \approx 22$ MPa и $t \approx 374$ °C е отбелязана точка с име „Critical point“ – “Критична точка”. В тази точка „свършва“ кривата, разделяща газовото от течното състояние. Предположете какви са свойствата на водата в течно и газово състояние при тези условия: Тъй като всички течности се разширяват с температурата (аномалното поведение на водата между 0 °C и 4 °C е изключение), плътността на водата ще

намалява с увеличаване на температурата. Обратно, с нарастването на температурата налягането на парите ще нараства. Ще нараства и тяхната плътност. Следователно ще съществува температура (наречена критична), при която плътностите на течната вода и нейните пари ще се изравни и ще изчезне разликата между тях. Над тази температура не може да се наблюдава преход от течно в газово състояние.
[2 т.]