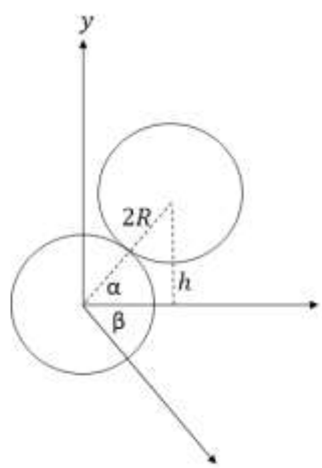
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, НАЦИОНАЛЕН КРЪГ, 9 май 2021 г.
Тема за 11-12. клас (пета състезателна група)
Решения и указания

Задача 1. Удар между билиардни топки

а) Ще насочим оста x по хоризонталата, а оста y – по вертикалата, както е показано на фигурата. От правоъгълния триъгълник намираме

$$\sin\alpha = \frac{h}{2R}\,, \qquad \cos\alpha = \sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}$$ **[1 т.]**



б) Написваме закона за запазване на импулса по оста x и по оста y, както и закона за запзване на енергията:

(1) $$m_1 v_1 = m_2 v'_2 \cos\alpha + m_1 v'_1 \cos\beta$$ **[0,5 т.]**

(2) $$m_2 v'_2 \sin\alpha = m_1 v'_1 \sin\beta$$ **[0,5 т.]**

(3) $$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$ **[0,5 т.]**

От (1) и (2) намираме

(4) $$v'_1 \sin\beta = \frac{m_2}{m_1} v'_2 \sin\alpha\,,$$

(5) $$v'_1 \cos\beta = v_1 - \frac{m_2}{m_1} v'_2 \cos\alpha\,.$$

Заместваме (4) и (5) в уравнение (3) и като отчетем, че $v_1'^2 = \left(v'_1 \sin\beta\right)^2 + \left(v'_1 \cos\beta\right)^2$, получаваме

(6) $$v'_2 = \frac{2v_1\cos\alpha}{1+\frac{m_2}{m_1}} = \frac{2v_1}{1+\frac{m_2}{m_1}}\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}\,.$$ **[1 т.]**

Аналогично получаваме v'_1:

(7) $$v'_1 = \frac{v_1}{1+\frac{m_2}{m_1}}\sqrt{\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)^2+\frac{m_2}{m_1}\frac{h^2}{R^2}}$$ **[0,5 т.]**

в) Можем да намерим β като заместим (6) и (7) в (4), при което получаваме

(8) $$\sin\beta = \frac{m_2}{m_1}\frac{h}{R}\frac{\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}}{\sqrt{\left(1-\frac{m_2}{m_1}\right)^2+\frac{m_2}{m_1}\frac{h^2}{R^2}}}\,.$$ **[1,75 т.]**

При $m_2 = m_1$, имаме $\sin\beta = \sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}} = \cos\alpha$. Така получаваме $\alpha+\beta = \frac{\pi}{2}$. **[0,25 т.]**

г) За да може топката да влезе в джоба (точка А), е необходимо

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{a}{3b}\,.$$ **[1,75 т.]**

От друга страна намираме

$$\frac{a}{b} = 3\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = 3\sqrt{\left(\frac{2R}{h}\right)^2-1}\,.$$ **[0,25 т.]**

д) От уравнение (8) следва

$$\sin\beta = (1-\varepsilon)\frac{h}{R}\frac{\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}}}{\sqrt{\varepsilon^2+(1-\varepsilon)\frac{h^2}{R^2}}}\,.$$

Като пренебрегнем ε^2 в знаменателя, с точност до членове пропорционални на ε имаме

(9) $$\sin\beta = \sqrt{1-\varepsilon}\sqrt{1-\frac{h^2}{4R^2}} \approx \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\cos\alpha\,.$$ **[1 т.]**

Тъй като $\beta = \frac{\pi}{2}-\alpha+\Delta\beta$, получаваме

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\Delta\beta\right) = \cos(\alpha-\Delta\beta) = \cos\alpha\cos\Delta\beta+\sin\alpha\sin\Delta\beta \approx \cos\alpha+\Delta\beta\sin\alpha$$ **[1 т.]**

Като заместим в (9), намираме:

$$\Delta\beta \approx \frac{\varepsilon}{2}\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\left(\frac{2R}{h}\right)^2-1}\,.$$ **[1 т.]**

(е) Записваме закона за запазване на изпулса и на енергията:

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v'_{1x} + m_2 v'_{2x}$$ **[1 т.]**

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v'^2_{1x} + \frac{1}{2} m_2 v'^2_{2x}$$ **[1 т.]**

Системата от двете уравнения се решава, като изразим от първото v'_{2x}, т. е.

$$v'_{2x} = \frac{m_1}{m_2} v_1 - v_2 - \frac{m_1}{m_2} v'_{1x}$$

и заместим във второто, при което получаваме квадратно уравнение за v'_{1x};

$$\left(1 + \frac{m_1}{m_2}\right) v'^2_{1x} - 2v'_{1x} \left(\frac{m_1}{m_2} v_1 - v_2\right) - 2v_1 v_2 - \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) v_1^2 = 0 .$$

Една четвърт от дискримантата на това уравнение е точен квадрат:

$$\frac{1}{4} D = \left(v_1 + v_2\right)^2 .$$

Оттук намираме корените на квадратното уравнение. Единият корен $v'_{1x} = v_1$ дава $v'_{2x} = -v_2$, което съответства на ситуацията преди удара. Другият корен е

$$v'_{1x} = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 - \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_2 ,$$ **[1 т.]**

при което олучаваме

$$v'_{2x} = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 + \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_2 .$$ **[1 т.]**

Задача 2. Верига с кондензатори

Задачата може да бъде решена изцяло с материал от задължителната подготовка от 9. и 10. клас, но може да се използват и формулите за еквивалентен капацитет и за енергия на зареден кондензатор.

а) Поради симетрията на веригата е ясно, че:

$$q_1 = q_4 \text{ и } q_2 = q_3$$ **[1 т.]**

Тъй като кондензаторите 1 и 2 (3 и 4) са свързани последователно към източника, следва, че върху тях има равни заряди (какъвто заряд се втича върху положителната плоча на 1, такъв заряд изтича от отрицателната плоча на 2). Следователно:

$$q_1 = q_2 \text{ и } q_3 = q_4$$ **[1 т.]**

Така получаваме, че върху четирите кондензатора има еднакъв заряд q_0. Сумата от напреженията върху последователно свързани елементи във веригата е равна на напрежението на източника:

$$\frac{q_0}{C} + \frac{q_0}{2C} = \mathcal{E},$$ **[1 т.]**

откъдето намираме заряда върху кондензаторите:

$$q_0 = \frac{2}{3} C\mathcal{E}.$$ **[1 т.]**

б) Преразпределянето на зарядите между кондензаторите продължава, докато напрежението върху резистора стане равно на нула. **[1 т.]**

От симетрията на получената верига следва, че напреженията върху четирите кондензатора стават равни на $U = \mathcal{E}/2$. Следователно новите заряди върху кондензаторите са, както следва:

$$q_1 = q_4 = CU = \frac{C\mathcal{E}}{2} \qquad \textbf{[1 т.]}$$

$$q_2 = q_3 = 2C \times U = C\mathcal{E} \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Оттук следва, че след свързването на резистора, от т. A към отрицателната плоча на кондензатора 1 протича заряд $q_0 - q_1 = C\mathcal{E}/6$ (**1 т.**), а към положителната плоча ва кондензатора 2 – заряд $q_2 - q_0 = C\mathcal{E}/3$ (**1 т.**). От закона за запазване на заряда следва, че през резистора от т. B към т. A се пренася заряд:

$$q_R = \frac{1}{6}C\mathcal{E} + \frac{1}{3}C\mathcal{E} = \frac{1}{2}C\mathcal{E}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

в) Преди да бъде свързан резисторът, напреженията върху кондензаторите 1 и 3 са съответно:

$$U_1 = \frac{q_0}{C} = \frac{2}{3}\mathcal{E}; \qquad \textbf{[1 т.]}$$

$$U_3 = \frac{q_0}{2C} = \frac{1}{3}\mathcal{E}, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

а напрежението между A и B:

$$U_{AB} = U_1 - U_2 = \frac{1}{3}\mathcal{E}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Следователно напрежението върху резистора се променя от U_{AB} в началото до 0, след като във веригата се установи равновесие. Това означава, че зарядът през резистора се пренася при средно напрежение:

$$U_{\text{ср}} = \frac{U_{AB} + 0}{2} = \frac{1}{6}\mathcal{E}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Отделеното в резистора количество топлина е равно на работата на електричните сили при пренасяне на заряда през резистора:

$$Q = q_R U_{\text{ср}} = \frac{1}{12}C\mathcal{E}^2. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Задача 3. Квантови свойства на светлината

Част А. а) От графиката на функцията $y(x)$ намираме

$$y = \frac{1}{2} \text{ при } x_0 \approx 1{,}41. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

От закона на Вин следва $\lambda_{\max} = \dfrac{b}{T_0}$, при което получаваме

$$\lambda = \lambda_{\max} x_0 = x_0 \frac{b}{T_0} \approx 1{,}11\ \mu\text{m}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

б) При $T = 5000\ \text{K}$ имаме

$$\lambda_{\max} = \frac{b}{T} \approx 0{,}58\ \mu\text{m}\,, \qquad \textbf{[0,25 т.]}$$

откъдето следва

$$x_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_{\max}} = \frac{0{,}40}{0{,}58} \approx 0{,}69\,, \ \textbf{[0,5 т.]} \qquad x_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_{\max}} = \frac{0{,}70}{0{,}58} \approx 1{,}21. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Така по графиката намираме

$$y(x_1) \approx 0{,}07\,, \qquad y(x_2) \approx 0{,}38\,, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

при което се получава

$$\Delta y = y(x_2) - y(x_1) \approx 0{,}38 - 0{,}07 \approx 0{,}31\,, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

т. е. това е частта от пълната излъчена енергия във видимата част на спектъра.

в) При T_0 имаме $\lambda'_{\max} = \dfrac{b}{T_0} \approx 0{,}784\ \mu\text{m}$ **[0,25 т.]**, при което намираме

$$x' = \frac{0{,}700}{0{,}784} \approx 0{,}893\,, \qquad y(x') \approx 0{,}18\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Като използваме закона на Стефан–Болцман получаваме

$$\frac{P''}{P'} = \left(\frac{T}{T_0}\right)^4 \frac{1 - y(x_2)}{1 - y(x')} = \left(\frac{5}{3{,}7}\right)^4 \frac{1 - 0{,}38}{1 - 0{,}18} \approx 2{,}5\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част Б. а) Ще преобразуваме мерната единица на интензитета на светлината. Така имаме

$$[J] = \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{s.m}^2} = \frac{\text{N.m}}{\text{s.m}^2} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \times \frac{\text{m}}{\text{s}} = [P] \times [u]\,, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

където $[P]$ е единицата за налягане, а $[u]$– единицата за скорост. Следователно можем да запишем

$$[P] = \frac{[\text{J}]}{[u]}\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

В задачата скоростта на снопа е $u = c$ във вакуум **[0,25 т.]** и $u = c / n \sim c$ **[0,25 т.]** в стъклото. По този начин стигаме до израз за налягането

$$P = \frac{J}{c} f(n)\,, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

където $f(n)$ е число, зависещо от показателя на пречупване.

б) Нека приемем, че снопът се състои от фотони с енергия $\varepsilon = h\nu$ **[0,5 т.]**. Тогава като въведем броя фотони N, които попадат върху единица площ за единица време, имаме

$$J = Nh\nu\,, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Тъй като от една страна е изпълнено равенството $\nu = c/\lambda$ **[0,5 т.]**, а импулсът p на фотона е $p = h/\lambda$ **[0,5 т.]**, за импулса на снопа намираме израза

$$Np = \frac{J}{c}.$$ **[0,5 т.]**

Този сноп като достигне повърхността на пластината се разделя на две части: едната образува отразен сноп, който отнася импулс

$$N_1 p = RNp = R\frac{J}{c}$$ **[0,5 т.]**,

а втората образува преминал сноп, който отнася импулс

$$N_2 p_2 = N_2 \frac{h}{\lambda_2} = N_2 np = (1-R)nNp = (1-R)n\frac{J}{c}$$ **[1 т.]**.

Във векторен вид съответните импулси са

$$\mathbf{p}_0 = N\mathbf{p}, \quad \mathbf{p}_1 = -RN\mathbf{p} = -R\mathbf{p}_0, \quad \mathbf{p}_2 = (1-R)nN\mathbf{p} = (1-R)n\mathbf{p}_0.$$ **[0,75 т.]**

При отсъствие на поглъщане изменението на импулса на снопа след взаимодействието със стъклената пластина е

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_2 - \mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_0\left[(n-1)-(n+1)R\right],$$ **[0,75 т.]**

т. е. имаме

$$\Delta\mathbf{p} = \mathbf{p}_0 \frac{2(n-1)}{(n+1)} = \mathbf{f}'.$$ **[0,5 т.]**

По третия закон на Нютон търсената сила е $\mathbf{f} = -\mathbf{f}'$. Следователно намираме за големината на силата

$$f = |\Delta\mathbf{p}| = \frac{2(n-1)}{n+1}\frac{J}{c} \approx 133\ \mu\text{Pa},$$ **[0,5 т.]**

а посоката на силата $\mathbf{f}$ е противоположна на вектора $\mathbf{p}_0$, т. е. противоположна на посоката на падащия светлинен сноп. **[0,5 т.]**

Задача 4. Бета-разпадане на неутрона

Част А. а) Нека означим с p_p импулса на протона. Тогава от закона за запазване на импулса следва $p_p = p_e$. (1) **[0,3 т.]** От закона за запазване на енергията имаме

(2) $$m_n c^2 = \sqrt{{m_p}^2 c^4 + {p_p}^2 c^2} + \sqrt{{m_e}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2}.$$ **[0,7 т.]**

Замествайки (1) в (2), $m_n c^2 - \sqrt{{m_p}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2} = \sqrt{{m_e}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2}$. След повдигане на квадрат имаме

$${m_n}^2 c^4 - 2m_n c^2\sqrt{{m_p}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2} + {m_p}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2 = {m_e}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2.$$ **[0,5 т.]**

Като съкратим на ${p_e}^2 c^2$ и преобразуваме, намираме

$$c^4\left({m_n}^2 + {m_p}^2 - {m_e}^2\right) = 2m_n c^2\sqrt{{m_p}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2}.$$ **[0,5 т.]**

След съкращаване на c^2 и повдигане на квадрат

$$c^4\left({m_n}^2 + {m_p}^2 - {m_e}^2\right)^2 = 4{m_n}^2\left({m_p}^2 c^4 + {p_e}^2 c^2\right).$$

След ново съкращаване на c^2 и преобразуване, окончателно намираме

(3) $$p_e = c\sqrt{\frac{\left({m_n}^2+{m_p}^2-{m_e}^2\right)^2}{4{m_n}^2} - {m_p}^2}.$$ **[0,5 т.]**

След заместване със зададените стойности получаваме

$$p_e = 1{,}18725\ \mathrm{MeV}/c.$$ **[0,5 т.]**

б) Използвайки (3), пълната енергия на електрона е

$${E_e}^2 = {E_{e0}}^2 + {p_e}^2c^2 = {m_e}^2c^4 + c^2\left(\frac{\left({m_n}^2+{m_p}^2-{m_e}^2\right)^2}{4{m_n}^2} - {m_p}^2\right)c^2.$$ **[0,5 т.]**

Като приведем към общ знаменател, намираме

$${E_e}^2 = \frac{c^4}{4{m_n}^2}\left(4{m_n}^2{m_e}^2 + \left({m_n}^2 + {m_p}^2 - {m_e}^2\right)^2 - 4{m_n}^2{m_p}^2\right).$$

След разкриване на скобите, съкращаване и ново групиране на членовете, имаме

$${E_e}^2 = \frac{c^4}{4{m_n}^2}\left({m_n}^2 - {m_p}^2 + {m_e}^2\right)^2,$$

откъдето следва

(4) $$E_e = \frac{c^2}{2m_n}\left({m_n}^2 - {m_p}^2 + {m_e}^2\right)$$ **[1 т.]** = 1,29255 MeV. **[0,5 т.]**

Кинетичната енергия $E_{kin\,e}$ на електрона, получен при разпадането, е

$$E_{kin\,e} = E_e - E_{e0} = 1{,}29255\ \mathrm{MeV} - 0.510999\ \mathrm{MeV} = 0{,}781551\ \mathrm{MeV}.$$ **[0,5 т.]**

в) Тъй като $p_p = \frac{m_p v_p}{\sqrt{1-\left(\frac{v_p}{c}\right)^2}}$, то след повдигане на квадрат и умножаване по знаменателя, имаме

$${p_p}^2\left(1 - \left(\frac{v_p}{c}\right)^2\right) = {m_p}^2{v_p}^2,$$

откъдето намираме

$${v_p}^2 = \frac{{p_p}^2}{{m_p}^2 + \frac{{p_p}^2}{c^2}},$$ **[0,5 т.]**

(5) $$\frac{v_p}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_p c}{p_p}\right)^2 + 1}}$$ **[1 т.]** $= 1{,}26536.10^{-3}$, **[0,5 т.]**

$$v_p = 3{,}79344.10^5\ \mathrm{m/s}.$$ **[0,5 т.]**

Част Б. г) Тъй като след разпадането импулсът и енергията се разпределят между 3 частици (протон, електрон и антинеутрино), кинетичната енергия на електрона $E_{kin\,e}$ може да има всички стойности в някакъв интервал от енергии в зависимост от посоките на импулсите на трите частици. **[0,2 т.]** Минималната кинетична енергия $E_{kin\,e\,min} = 0$, защото е възможна ситуация, при която след разпадането електронът остава неподвижен, а протонът и неутриното се движат в противоположни посоки. **[0,4 т.]** Максималната кинетична енергия е $E_{kin\,e\,max} = E_{kin\,e}$ (получена в подусловие б)), защото е възможна ситуация, в която образувалото се неутрино има безкрайно малка енергия и импулс, при което тази ситуация ще съвпада с тази, описана в Част А. **[0,4 т.]**

д) В случая 1, когато след разпадането електронът остава неподвижен, законите за запазване на импулса и енергията изглеждат така:

(6) $$p_p = p_\nu,$$

(7) $$m_n c^2 = m_e c^2 + \sqrt{m_p{}^2 c^4 + p_p{}^2 c^2} + p_\nu . c\ .$$

Ако сравним (6) и (7) с (1) и (2), се забелязва, че те описват подобни ситуации. Сегашната ситуация преминава в тази от подусловие а), ако се направи формалната замяна $e \to \nu$ и $m_n \to m_n - m_e$. Следователно можем направо да използваме отговора (4), правейки посочените замени:

$$E_\nu = \frac{c^2}{2(m_n - m_e)}\left((m_n - m_e)^2 - m_p{}^2\right)$$ **[1 т.]** = 0,781975 MeV. **[0,5 т.]**

Скоростта на протона v_{p1} също не е нужно да се получава наново, защото може да се използва отговорът (5):

$$\frac{v_p}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_p c}{p_p}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_p{}^2 c^4}{E_\nu{}^2} + 1}}$$ **[1 т.]** = 8,33420.10^{-4} **[0,3 т.]**,

v_{p1} = 2,49853.10^5 m/s. **[0,2 т.]**

е) В случая 2, когато след разпадането протонът остава неподвижен, законите за запазване на импулса и на енергията изглеждат така

(8) $$p_e = p_\nu ,$$

(9) $$m_n c^2 = m_p c^2 + \sqrt{m_e{}^2 c^4 + p_e{}^2 c^2} + p_\nu . c\ .$$

Ако сравним (8) и (9) с (1) и (2), се вижда, че те описват подобни ситуации. Сегашната ситуация преминава в тази от подусловие а), ако се направи формалната замяна $e \to \nu$, $p \to e$ и $m_n \to m_n - m_p$. Следователно можем направо да използваме отговора (4), правейки посочените замени:

$$E_\nu = \frac{c^2}{2(m_n - m_p)}\left(\left(m_n - m_p\right)^2 - m_e{}^2\right)$$ **[1 т.]** = 0,545699 MeV. **[0,5 т.]**

Скоростта на електрона $v_{\mathrm{e}2}$ също не е нужно да се извежда отново, защото може да се използва отговор (5):

$$\frac{v_\mathrm{e}}{c} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{m_\mathrm{e} c}{p_\mathrm{e}}\right)^2 + 1}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{m_\mathrm{e}{}^2 c^4}{E_\nu{}^2} + 1}}$$ **[1 т.]** = 0,729933 **[0,3 т.]**, v_{e2} = 2,18829.10^8 m/s. **[0,2 т.]**

маса на неутрона m_n = 939,5656 MeV/c^2

маса на протона m_p = 938,2723 MeV/c^2

маса на електрона m_e = 0,510999 MeV/c^2

скорост на светлината c = 2,99792458.10^8 m/s