

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 10 ноември 2019 г., Велико Търново

Решения на темата за IV състезателна група

(учебно съдържание за 10. клас)

Задача 1. Кинематика

а) Когато мотоциклетът настига последния вагон на влака, скоростта му е $v_M(t_H) = v_{M0} + a_M t_H = 4v_{M0}$, откъдето $v_{M0} = a_M t_H / 3$. **[0,5 т.]** Изминатите пътища от мотоциклета и влака до момента на настигането удовлетворяват условието $s_M(t_H) - s_B(t_H) = d$, откъдето $d = v_{M0} t_H + \frac{a_M t_H^2}{2} - 2v_{M0} t_H = \frac{a_M t_H^2}{2} - v_{M0} t_H = \frac{a_M t_H^2}{6}$. **[0,5 т.]**

Първоначално влакът се движи по-бързо от мотоциклета и разстоянието между тях нараства, докато скоростта на мотоциклета $v_M(t_{dmax})$ стане равна на скоростта на влака: $v_M(t_{dmax}) = v_{M0} + a_M t_{dmax} = v_{B0} = 2v_{M0}$. **[1 т.]** Оттук $t_{dmax} = \frac{v_{M0}}{a_M} = \frac{t_H}{3}$. **[0,5 т.]** Тогава разстоянието между мотоциклета и влака е максимално: $d_{max} = d + s_B(t_{dmax}) - s_M(t_{dmax}) = d + v_{B0} t_{dmax} - (v_{M0} t_{dmax} + \frac{a_M t_{dmax}^2}{2}) = d + v_{M0} t_{dmax} - \frac{a_M t_{dmax}^2}{2} = \frac{2a_M t_H^2}{9} = 32 \text{ m}$. **[1 т.]**

б) От настигането на последния вагон до момента на изпреварването на локомотива, мотоциклетът изминава път $4v_{M0} t_{изп} + \frac{a_M t_{изп}^2}{2} = \ell + 2v_{M0} t_{изп} - \frac{a_B t_{изп}^2}{2}$, т.е. дължината на влака заедно с пътя, изминат от влака за същото време. **[1 т.]** Времето за изпреварване се определя от квадратното уравнение: $(a_M + a_B) t_{изп}^2 + 4v_{M0} t_{изп} - 2\ell = 0$. **[0,5 т.]** Оттук $t_{изп} = \frac{[\sqrt{4v_{M0}^2 + 2\ell(a_M + a_B)} - 2v_{M0}]}{(a_M + a_B)} = \frac{50}{3} \text{ s} \approx 16,7 \text{ s}$. **[1,5 т.]**

в) В момента на изпреварването скоростта на мотоциклета е $v_M(t_H + t_{изп}) = 4v_{M0} + a_M t_{изп}$ **[0,5 т.]**, а на влака е $v_B(t_H + t_{изп}) = 2v_{M0} - a_B t_{изп}$. **[0,5 т.]** Скоростта на мотоциклета е $\frac{v_M(t_H + t_{изп})}{v_B(t_H + t_{изп})} = 7$ пъти по-голяма от скоростта на влака. **[0,5 т.]**

г) Влакът спира за време $t_{сп} = 2v_{M0}/a_B$, след като започва да се движи равнозакъснително. **[0,5 т.]** Търсеното разстояние $d' = s_M(t_H + t_{сп}) - s_B(t_H + t_{сп}) - d - \ell = 4v_{M0} t_{сп} + \frac{a_M t_{сп}^2}{2} - \frac{2v_{M0}^2}{a_B} - \ell = \frac{2}{9} \left(\frac{a_M}{a_B} + 3 \right) \frac{a_M^2 t_H^2}{a_B} - \ell = 980 \text{ m}$. **[1,5 т.]**

Задача 2. Трептяща система

а) Първоначално пружините са разтегнати, т.е. лявата пружина дърпа теглилката надолу със сила с големина $k\Delta x_{л0}$, а дясната пружина я дърпа нагоре със сила $k\Delta x_{д0}$. **[0,5 т.]** От условието за равновесие следва, че $k\Delta x_{л0} + mg = k\Delta x_{д0}$, откъдето $\Delta x_{д0} = \Delta x_{л0} + mg/k$. **[1 т.]** След прерязването на нишката теглилката трепти около равновесно положение, което се намира на височина h_{eq} над началното ѝ положение, което съвпада с долното крайно положение по време на трептенето. Следователно амплитудата на трептенето е $A = h_{eq}$. **[0,5 т.]** От неразтегливостта на нишките следва, че дясната пружина е разтегната с $\Delta x_{д eq} = \Delta x_{д0} - h_{eq}$ в равновесното положение. **[0,5 т.]** Сумарната сила върху теглилката в равновесното положение е нула, т.е. $k\Delta x_{д eq} = mg$ **[0,5 т.]**, откъдето следва, че $A = h_{eq} = \Delta x_{д0} - \Delta x_{д eq} = \Delta x_{д0} - \frac{mg}{k} = \Delta x_{л0} = 5 \text{ cm}$. **[1 т.]**

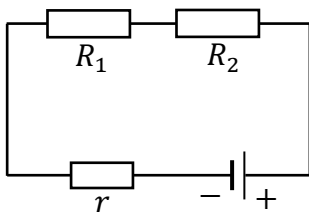
б) В горното крайно положение на теглилката дясната пружина е разтегната минимално с $\Delta x_{д min} = \Delta x_{д0} - 2A = \frac{2mg}{k} - \Delta x_{д0} = \Delta x_{д0}/3$ **[1 т.]**, откъдето $\Delta x_{д0} = \frac{3mg}{2k}$, а $\Delta x_{л0} = \frac{mg}{2k}$. **[0,5 т.]**

Оттук $\frac{k}{m} = \frac{g}{2\Delta x_{\text{до}}}$ и съответно честотата на трептене $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{2\Delta x_{\text{до}}}} = \frac{10}{2\pi} \text{ Hz} \approx 1,6 \text{ Hz}$.

[1 т.]

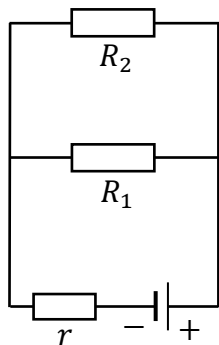
в) Пълната механична енергия E на трептящата система (теглилката и свързаната с нея дясна пружина) се запазва по време на трептенето [0,5 т.], като за удобство ще приемем, че теглилката има нулева гравитационна потенциална енергия в началното положение. Следователно механичната енергия на системата при долно крайно положение на теглилката е $E = k(\Delta x_{\text{до}})^2/2$. [0,5 т.] В равновесното положение енергията $E = k(\Delta x_{\text{д eq}})^2/2 + \frac{mv_{\text{max}}^2}{2} + mgh_{\text{eq}}$. [1 т.] Приравняваме двата израза за енергията, заместваем от по-горе и опростяваме, след което получаваме $v_{\text{max}} = \frac{g}{2} \sqrt{\frac{m}{k}} = \sqrt{\frac{g\Delta x_{\text{до}}}{2}} = 0,5 \text{ m/s}$. [1,5 т.]

Задача 3. Електрически вериги



а) Схемата при последователно свързване е показана вляво горе, а на успоредно свързване – вляво долу. [1 т.]

б) От закона на Ом за цялата верига следва, че токът през последователно свързаните резистори е $I_{\text{п}} = \frac{\varepsilon}{r+R_1+R_2}$. [0,5 т.] Мощността, която се отделя в резисторите в този случай, е $I_{\text{п}}^2(R_1 + R_2) = \frac{\varepsilon^2(R_1+R_2)}{(r+R_1+R_2)^2}$. [0,5 т.] Аналогично, токът през батерията при



успоредното свързване е $I_y = \varepsilon / \left(r + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \right)$. [0,5 т.] Следователно отделената мощност в резисторите при успоредното свързване е $I_y^2 R_1 R_2 / (R_1 + R_2) = \varepsilon^2 R_1 R_2 (R_1 + R_2) / [r(R_1 + R_2) + R_1 R_2]^2$. [1 т.] След приравняване на горните два израза за мощностите, се получава, че $R_1 R_2 (r + R_1 + R_2)^2 = [r(R_1 + R_2) + R_1 R_2]^2$. [0,5 т.] Допълнително опростяване води до $r = \sqrt{R_1 R_2}$. [1,5 т.]

в) От горните изрази за отделените мощности в резисторите следват уравненията $R_1 + R_2 = P / I_{\text{п}}^2$ [0,5 т.] и $R_1 R_2 = P^2 / (I_{\text{п}}^2 I_y^2)$. [1 т.] От формулите на Виет непосредствено се вижда, че R_1 и R_2 са

корените на квадратното уравнение $R^2 - \frac{P}{I_{\text{п}}^2} R + \frac{P^2}{I_{\text{п}}^2 I_y^2} = 0$ [0,5 т.], откъдето $R_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\frac{P}{I_{\text{п}}^2} \pm \sqrt{\frac{P^2}{I_{\text{п}}^4} - \frac{4P^2}{I_{\text{п}}^2 I_y^2}} \right) = \frac{P}{2I_{\text{п}}^2} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{4I_{\text{п}}^2}{I_y^2}} \right)$. [1 т.]

г) От горните подусловия следва, че $r = \sqrt{R_1 R_2} = \frac{P}{I_{\text{п}} I_y}$. [0,5 т.] Също така, от закона на Ом при последователното свързване: $\varepsilon = I_{\text{п}} \left(r + \frac{P}{I_{\text{п}}^2} \right) = P \left(\frac{1}{I_{\text{п}}} + \frac{1}{I_y} \right) = \frac{P(I_{\text{п}} + I_y)}{I_{\text{п}} I_y}$. [1 т.]