

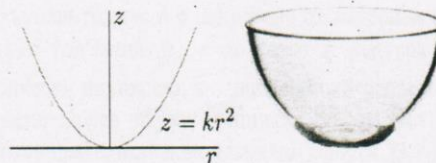
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

9-11 март 2018 г., гр. Стара Загора

СПЕЦИАЛНА ТЕМА

Задача 1. Механика

Тяло се движи по вътрешната повърхност на гладка параболична купа, чието сечение се задава с уравнението $z = kr^2$. Тялото е поставено на височина z_0 от дъното на купата и има хоризонтална скорост v_0 успоредно на повърхността на купата. Земното ускорение е g .



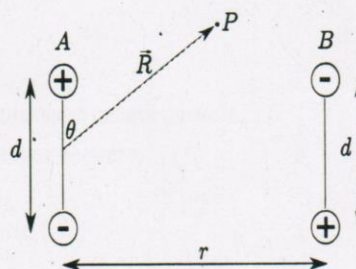
Фиг. 1

- а) За определена стойност на скоростта v_0 , която ще отбележим с v_h , тялото се движи по хоризонтална окръжност. Намерете v_h . [2 т.]
- б) Нека началната скорост е $v_0 > v_h$. Намерете максималната височина, до която достига тялото. [3 т.]
- В следващите две подточки тялото е поставено на височина z_0 и има начална скорост $v_0 = 0$.
- в) Приемете, че z_0 е достатъчно малко, така че движението може да се апроксимира с хармонично трептене. Намерете периода T_0 на движението. [3 т.]
- г) Приемете, че z_0 не е малко. Сравнете периода T на трептене с периода T_0 на хармоничното трептене от горното подусловие – ще бъде ли по-малък, по-голям или равен? Няма нужда да пресмятате експлицитната стойност за T . Достатъчно е да аргументирате отговора си. [2 т.]

Задача 2. Електричество

Част 1

Електричният дипол се състои от два заряда с равна големина q и противоположен знак, разделени на разстояние d един от друг. Векторът на диполния момент има големина $p = qd$ и сочи по оста, свързваща $-q$ с $+q$. Разгледайте два идентични дипола, ориентирани както е показано на фигурата. Разстоянието между тях е r .



Фиг. 2

- а) Намерете точен израз за потенциалната енергия на системата от два дипола, изразена чрез q , d , r и фундаментални константи. За удобство приемете, че потенциалната енергия е нула, когато диполите са на безкрайно разстояние един от друг; [1 т.]
- Във всички следващи подусловия приемете, че $d \ll r$.
- б) Направете приближение на израза за потенциалната енергия като запазете само най-ниската степен на d/r . Напишете приближението чрез p , r и фундаментални константи. [2т.]

в) Намерете големината и посоката на силата, с която единият дипол действа на другия. Изразете силата чрез p , r и фундаментални константи. [2 т.]

г) Намерете потенциала, създаден от дипола A в точка P , изразен чрез векторите \vec{r} и \vec{R} и фундаментални константи. [2 т.]

Част 2

д) Сферична обвивка с вътрешен радиус a и външен радиус b е направена от материал със специфично съпротивление ρ . Точков заряд с големина q_0 е поставен в центъра на обвивката. В момента $t = 0$ обвивката е електрически неутрална, включително вътрешната и външната ѝ повърхност. Намерете заряда, разпределен върху външната повърхност на обвивката като функция на времето за $t \geq 0$. Игнорирайте всякакви магнитни ефекти. [3 т.]

Задача 3. Топлина

Част 1

Планета с радиус R е съставена от равномерно разпределен материал, който чрез радиоактивен разпад отделя енергия с мощност P . Това води до зависимост на температурата от положението в планетата, тъй като има пренос на топлина отвътре-навън.

Коефициентът на топлопроводимост е мярка за скоростта на преноса на топлина в резултат от температурна разлика. Да разгледаме тънка пластина с площ S и дебелина Δx , едната повърхност на която е с температура ΔT по-висока от другата. Нека през пластината да преминава топлина ΔQ за време Δt . Коефициентът на топлопроводимост се дефинира като

$$k = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{1}{S} \frac{\Delta x}{\Delta T}.$$

Намерете:

- температурата T_s на повърхността на планетата; [1 т.]
- температурната разлика ΔT между температурите в центъра и на повърхността на планетата. [4 т.]

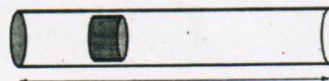
Приемете, че

- k не зависи от положението в планетата, т.е. k е еднаква за цялата планета;
- температурата зависи само от координатите, но не и от времето;
- планетата излъчва като абсолютно черно тяло;
- върху планетата не попада енергия от друг източник.

Част 2

Оръдие с форма на цилиндър с площ на напречното сечение S изстрелва снаряд. Непосредствено след взрива снарядът е в покой, обемът между затворения край на тръбата и снаряда е V_0 , а налягането на газа в този обем е P_0 . Атмосферното налягане е $P_{\text{атм}}$, като $P_0 > P_{\text{атм}}$. Газът в цилиндъра е двуатомен, т.е. $C_V = 5R/2$, а $C_P = 7R/2$.

Дължината на оръдието може да се изменя.



Фиг. 3

Намерете:

в) максималната възможна кинетична енергия E_{\max} , с която снарядът може да напусне оръдието; [4 т.]

г) дължината на оръдието L в този случай. [1 т.]

Приемете, че

- снарядът се движи в цилиндъра достатъчно бързо, така че газът не получава топлина;
- триенето между снаряда и цилиндъра е пренебрежимо;
- около снаряда не преминава газ;
- вдясно от снаряда налягането е винаги $P_{\text{атм}}$.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

9-11 март 2018 г., гр. Стара Загора

Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Механика

а) На тялото действат две сили: реакцията на опората N и силата на тежестта G . Тъй като тялото се движи по окръжност, резултантната на всички сили има единствено хоризонтална компонента, която се явява центростремителна сила. Така получаваме:

$$N \cos \theta = mg,$$
$$N \sin \theta = \frac{mv_h^2}{r_0}, \quad [1 \text{ т.}]$$

където θ е ъгълът между допирателната към повърхността и хоризонталата. Следователно $\tan \theta = \frac{v_h^2}{gr_0}$. Същевременно имаме $\tan \theta = \frac{dz}{dr} = 2kr_0$, откъдето $v_h^2 = 2kgr_0^2 = 2gz_0$. Окончателно получаваме $v_h = \sqrt{2gz_0}$. [1 т.]

б) Означаваме максималната височина със z , съответния радиус с r и съответната скорост с v . От закона за запазване на енергията имаме

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgz_0 = \frac{mv^2}{2} + mgz. \quad [1 \text{ т.}]$$

Да разгледаме въртящия момент, който създават двете сили спрямо оста z : $\vec{M} = \vec{r} \times (\vec{N} + \vec{G})$.

Тъй като $M_z = 0$ и $\frac{dL_z}{dt} = M_z$, имаме $L_z = \text{const}$, т.е. z -компонентата на момента на импулса се запазва. Следователно

$$mv_0 r_0 = mvr, \text{ т.е. } v = v_0 \sqrt{\frac{z_0}{z}}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Така за максималната височина получаваме $z = \frac{v_0^2}{2g}$. [1 т.]

в) Ще разгледаме два подхода: динамичен и енергетичен.

Динамичен:

Тъй като z_0 е малко, за ъгъла на допирателната имаме

$$\sin \theta \approx \theta \approx \tan \theta = \frac{dz}{dr} = 2kr \text{ и } \cos \theta \approx 1. \quad [0.25 \text{ т.}]$$

Големината на тангенциалната сила, действаща на тялото, е $F_T = mg \sin \theta$ [0.25 т.]. Радиалната ѝ компонента е $F_R = -mg \sin \theta \cos \theta$, където сме отчели посоката на нарастване на радиалната координата r , а радиалното ускорение е $a_R = -g \sin \theta \cos \theta$ [0.25 т.]. Правим

приближение за малък ъгъл и получаваме $a_r \approx -g\theta = -g2kr$ [0.25 т.]. Така получаваме

$$a_r \equiv \frac{d^2 r}{dt^2} = -2kgr. [1 \text{ т.}]$$

Знаем, че координатата r е от вида $r = A \cos(\omega t + \varphi_0)$. Заместваем r в горното диференциално

уравнение: $\frac{d^2 r}{dt^2} = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi_0) = -\omega^2 r = -2gkr$, следователно

$$\omega = \sqrt{2gk} \text{ и } T = 2\pi / \sqrt{2gk}. [1 \text{ т.}]$$

Енергетичен:

Механичната енергия на тялото е $E = \frac{mv^2}{2} + mgz$. За скоростта имаме $v^2 = \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2$ [0.25

т.]. Тъй като $dz = 2kr dr$, имаме $\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = (1 + (2kr)^2) \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = (1 + \tan^2 \theta) \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 \approx \left(\frac{dr}{dt}\right)^2$

($\theta \approx 0$). [0.25 т.]

Така получаваме

$$E = \frac{m}{2} \left(\frac{dr}{dt}\right)^2 + mgkr^2. [0.25 \text{ т.}]$$

От закона за запазване на енергията имаме $\frac{dE}{dt} = 0$, откъдето $m \frac{dr}{dt} \frac{d^2 r}{dt^2} + 2mgkr \frac{dr}{dt} = 0$ [0.25 т.], т.е.

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = -2gkr. [1 \text{ т.}]$$

От това уравнение можем да намерим периода, както сме направили по-горе.

г) Точният израз за радиалното ускорение е $a_r = -g \sin \theta \cos \theta$, а периодът е получен с приблизителната формула $a_r \approx -g\theta$. Тъй като $g \sin \theta \cos \theta < g\theta$, точната формула за радиалното ускорение дава занижени стойности спрямо приблизителната. Следователно точният период е по-голям от пресметнатия. [2 т.]

Задача 2. Електричество

Част 1

а) Има две $+q, -q$ двойки, разделени на разстояние d , всяка от които има потенциална енергия

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 d}. [0.25 \text{ т.}]$$

Има две $+q, -q$ двойки, разделени на разстояние r , всяка от които има потенциална енергия

$$-\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0 r}. [0.25 \text{ т.}]$$

Има една $+q, +q$ двойка и една $-q, -q$ двойка, разделени на разстояние $\sqrt{r^2 + d^2}$, всяка от които има потенциална енергия

$$\frac{q^2}{4\pi\epsilon_0\sqrt{r^2 + d^2}} \cdot [0.25 \text{ т.}]$$

Последните два члена клонят към 0 с нарастване на r , докато първият член не зависи от r . За да приложим конвенцията за нулева потенциална енергия на безкрайност, запазваме само последните два члена:

$$\dot{U} = \frac{q^2}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{\sqrt{r^2 + d^2}} \right) \cdot [0.25 \text{ т.}]$$

б) Имаме

$$U = \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (d/r)^2}} - 1 \right)$$

Използваме биномиалното приближение $(1+x)^n \approx 1+nx$ за малки стойности на x .
Получаваме

$$U \approx \frac{2q^2}{4\pi\epsilon_0 r} \left(1 - \frac{1}{2} \left(\frac{d}{r} \right)^2 - 1 \right) \approx -\frac{q^2 d^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot [1 \text{ т.}]$$

Изразено чрез диполния момент:

$$U \approx -\frac{p^2}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot [1 \text{ т.}]$$

в) От съображения за симетрия следва, че силата трябва да е насочена по оста, свързваща двата дипола. Тъй като потенциалната енергия нараства с нарастване на разстоянието, силата е на привличане. Големината е

$$F = -\frac{dU}{dr} = -\frac{3p^2}{4\pi\epsilon_0 r^4} \cdot [1 \text{ т.}]$$

където знакът минус означава, че силата е на привличане. [1 т.]

Друго възможно решение е да се напише точен израз за силата и да се наложи биномиалното приближение, както по-горе.

г) Потенциалът в точка P е

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{R_-} - \frac{1}{R_+} \right) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{R_- - R_+}{R_- R_+} \right), [0.5 \text{ т.}]$$

където R_- и R_+ са разстоянията съответно до отрицателния и положителния заряд. При $d \ll R$ имаме $R_- - R_+ \approx d \cos \theta$ [0.5 т.] и $R_- R_+ \approx R^2$ [0.5 т.]. Така получаваме

$$V \approx \frac{p \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 R^2} = \frac{\vec{p} \cdot \vec{R}}{4\pi\epsilon_0 R^3} \cdot [0.5 \text{ т.}]$$

Част 2

д) По вътрешната повърхност ще се натрупа заряд $-Q$, а по външната ще се натрупа заряд $+Q$. От сферичната симетрия и от закона на Гаус следва, че електричното поле в обвивката е

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 - Q(t)}{r^2}. \quad [0.5 \text{ т.}]$$

Това ще доведе до ток с плътност

$$J = \frac{E}{\rho} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0\rho} \frac{q_0 - Q}{r^2}. \quad [0.5 \text{ т.}]$$

Самият ток е с големина

$$I = JS = \frac{q_0 - Q}{\epsilon_0\rho}. \quad [0.5 \text{ т.}]$$

Тъй като $I = dQ/dt$, имаме

$$\frac{dQ}{q_0 - Q} = \frac{dt}{\epsilon_0\rho}. \quad [0.5 \text{ т.}]$$

Следователно

$$\int_0^{Q(t)} \frac{dQ}{q_0 - Q} = \int_0^t \frac{dt'}{\epsilon_0\rho}.$$

Така намираме

$$\frac{Q}{q_0} = 1 - \exp\left(-\frac{t}{\epsilon_0\rho}\right). \quad [1 \text{ т.}]$$

Задача 3. Топлина

Част 1

а) За мощността имаме $P = \sigma ST_s^4$. Така намираме

$$T_s = \left(\frac{P}{4\pi\sigma R^2}\right)^{1/4}. \quad [1 \text{ т.}]$$

б) Разумно е да приемем, че температурата зависи единствено от разстоянието до центъра на планетата. За слой с дебелина dr температурната разлика е dT (без да отчитаме знака на dT). Имаме

$$k = \frac{\Delta Q}{\Delta t} \frac{1}{4\pi r^2} \frac{dr}{dT}. \quad [1 \text{ т.}]$$

Топлината, преминаваща през сферичния слой, зависи от мощността, излъчена от заградения обем (планетата е еднородна). Имаме

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = P \frac{\frac{4}{3}\pi r^3}{\frac{4}{3}\pi R^3} = P \frac{r^3}{R^3}, \quad [1 \text{ т.}]$$

откъдето получаваме

$$dT = \frac{P}{4\pi kR^3} r dr. [1 \text{ т.}]$$

Така намираме

$$\Delta T = \frac{P}{8\pi kR}, [1 \text{ т.}]$$

откъдето можем да намерим и температурата в центъра на планетата.

Част 2

в) Снарядът ще се ускорява, докато налягането отляво е по-голямо от налягането отдясно. Следователно снарядът ще постигне максималната възможна кинетична енергия, ако цилиндърът е с такава дължина, че крайното налягане в затворения обем да е равно на $P_{\text{атм}}$.

Вътрешната енергия на идеален двуатомен газ е

$$U = \hat{C}_V nRT, [0.5 \text{ т.}]$$

където $\hat{C}_V = 5/2$ е безразмерният специфичен топлинен капацитет при постоянен обем. Тъй като $PV = nRT$, намираме

$$U = \hat{C}_V PV. [0.5 \text{ т.}]$$

Максималната кинетична енергия се достига, когато крайното налягане е равно на $P_{\text{атм}}$. Тогава работата, която извършва газът върху снаряда, е

$$A = \hat{C}_V (P_0 V_0 - P_{\text{атм}} V_f). [1 \text{ т.}]$$

Взимаме предвид това, че снарядът се движи във въздух, който оказва насрещно налягане $P_{\text{атм}}$. Така за кинетичната енергия получаваме

$$E_{\text{max}} = \hat{C}_V (P_0 V_0 - P_{\text{атм}} V_f) - P_{\text{атм}} (V_f - V_0). [0.5 \text{ т.}]$$

Газът се разширява адиабатно и затова

$$V_f = V_0 \left(\frac{P_0}{P_{\text{атм}}} \right)^{1/\gamma}, [0.5 \text{ т.}]$$

където $\gamma = C_p/C_V = 7/5$. Заместваме числените стойности:

$$E_{\text{max}} = \frac{5}{2} P_0 V_0 - \frac{7}{2} P_{\text{атм}} V_f + P_{\text{атм}} V_0,$$

т.е.

$$E_{\text{max}} = \left(\frac{5}{2} P_0 + P_{\text{атм}} - \frac{7}{2} P_{\text{атм}}^{2/7} P_0^{5/7} \right) V_0. [1 \text{ т.}]$$

г) За дължината на оръдието директно получаваме

$$L = \frac{V_f}{S} = \frac{V_0}{S} \left(\frac{P_0}{P_{\text{атм}}} \right)^{5/7}. [1 \text{ т.}]$$