

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

17–19 ноември 2017 г., гр. Варна

Тема за 11.–12. клас, пета състезателна група

Решения и указания

Задача 1. Тяло по наклонена равнина

Тяло с маса m се движи нагоре по наклонена равнина с ъгъл на наклона α (началното положение на тялото е показано на Фигура 1). Началната скорост на тялото е v_0 , а коефициентът на триене между тялото и равнината (и наклонената, и хоризонталната ѝ част) е μ ($\mu < \tan \alpha$).



Фигура 1

За следващите четири подусловия разгледайте движението на тялото по наклонената равнина и определете:

- 1.1. ускорението a на тялото като големина и посока, при движението му нагоре и надолу; (2 т.)
- 1.2. координатата x на тялото като функция на времето, при движението му нагоре и надолу; (2 т.)
- 1.3. времето t_n , за което тялото ще достигне максимална височина; (2 т.)
- 1.4. максималната височина, h_{max} , на която се издига тялото спрямо началното си положение ($t = 0$). (2 т.)

Приемете, че преходът между наклонената равнина и хоризонталния участък на Фиг. 1 е плавен, т.е. когато тялото преминава през него, се променя само посоката на скоростта му, но не и големината ѝ.

- 1.5. На какво разстояние се намира тялото, спрямо началното си положение ($t = 0$), при окончателното му спиране? (2 т.)

Решение: 1.1. Да разгледаме координатна система с начало най-ниската точка от наклонената равнина. Положителната посока на оста Ox да е успоредна на наклонената равнина и насочена нагоре по нея. Определяме силите, които действат на тялото, и записваме втория закон на Нютон:

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{f} = m\vec{a}.$$

Тук с f е означена силата на триене, за която е изпълнено $f = \mu N = \mu mg \cos \alpha$. Като запишем горното равенство по компоненти, (1 т.) може да определим ускорението на тялото:

$$a = -(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g, \quad v > 0, \quad t < t_n; \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (1.1)$$

$$a = -(\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g, \quad v < 0, \quad t > t_n. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (1.2)$$

1.2. В така избраната координатна система за закона за движение на тялото получаваме:

$$x(t) = v_0 t - (\sin \alpha + \mu \cos \alpha)gt^2/2, \quad v > 0, \quad t < t_n; \quad (1 \text{ т.}) \quad (1.3)$$

$$x(t) = x_{max} - (\sin \alpha - \mu \cos \alpha)g(t - t_n)^2/2, \quad v < 0, \quad t > t_n, \quad (1 \text{ т.}) \quad (1.4)$$

където x_{max} е максималното разстояние, което изминава тялото нагоре по наклонената равнина.

1.3. Времето, за което тялото ще измине това разстояние, се определя от закона за скоростта (1 т.) и е равно на:

$$t_n = \frac{v_0}{(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g}. \quad (1 \text{ т.}) \quad (1.5)$$

Така за x_{max} получаваме израза:

$$x_{max} = \frac{v_0^2}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g}. \quad (1 \text{ т.})$$

1.4. Максималната височина, на която се издига тялото, е:

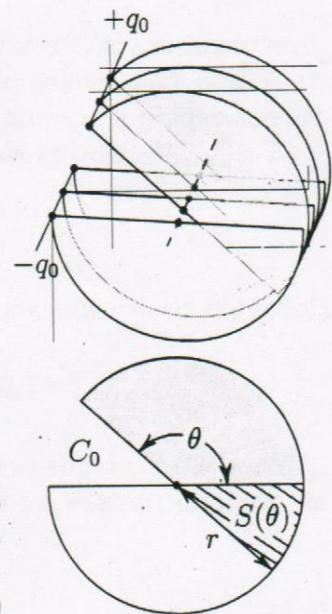
$$h_{max} = x_{max} \sin \alpha = \frac{v_0^2 \sin \alpha}{2(\sin \alpha + \mu \cos \alpha)g}. \quad (1 \text{ т.}) \quad (1.6)$$

1.5. За да определим разстоянието от началното положение, на което се намира тялото при окончателното му спиране, използваме закона за изменение на енергията $\Delta E = A_{тр}$, (1,5 т.) откъдето получаваме:

$$s = \frac{v_0^2 \sin \alpha - \mu \cos \alpha}{2\mu g \sin \alpha + \mu \cos \alpha}. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (1.7)$$

Задача 2. Кондензатор с променлив капацитет

2.1. За промяна на честотата на трептящ кръг в радиотехниката са се използвали кондензатори с променлив капацитет. Промяната на капацитета на такъв кондензатор става, като се промени ефективната площ на плочите на кондензатора. На Фигура 2 е показан кондензатор с променлив капацитет, който се състои от $2N$ на брой еднакви тънки плочи с формата на полукръг с радиус r . Плочите са разделени на два реда, условно бели и сиви, като плочите във всеки ред са свързани с проводници (плътните линии на горната част от Фиг. 2). Разстоянието между две съседни плочи от един ред (например белите) е d . Сивите плочи са поставени точно по средата между белите плочи и могат да се въртят около ос, минаваща през центъра на всеки от полукръговете – пунктираната линия от Фиг. 2. Определете капацитета C на кондензатора като функция на ъгъла на завъртане θ . При $\theta = 0$ капацитетът $C(0) = C_0$ е максимален. (3 т.)



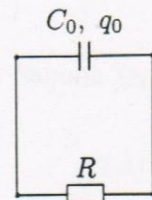
Фигура 2

2.2. Кондензатор с променлив капацитет е успоредно свързан с резистор със съпротивление R – Фигура 3. В началния момент кондензаторът е зареден до заряд q_0 , а капацитетът му е C_0 (кондензаторът от предното подусловие):

2.2.1. С каква љглова скорост ω трябва да въртим плочите му, така че токът във веригата да остава постоянен? (4 т.)

2.2.2. За колко време τ кондензаторът ще се разрези напълно? (1,5 т.)

2.2.3. Колко е отделеното количество топлина Q през резистора за това време? (1,5 т.)



Фигура 3

Решение: 2.1. Всеки две съседни плочи от различни редове на променливия кондензатор образуват плосък кондензатор с ефективна площ на плочите $S(\theta)$ и разстояние между тях $d/2$, така за капацитета на един от тези кондензатори може да запишем:

$$C_1(\theta) = \frac{\epsilon_0 S(\theta)}{d/2} = \frac{\epsilon_0(\pi - \theta)r^2}{d}, \quad (1 \text{ т.})$$

където r е радиусът на плочите, а $(\pi - \theta)$ е љгълът, под който те се припокриват. Като отчетем, че $2N$ плочи, свързани по указания начин, образуват $2N - 1$ успоредно свързани кондензатори с капацитет C_1 , (1 т.) то капацитетът на променливия кондензатор, изразен като функция на љгъла θ , ще бъде:

$$C(\theta) = (2N - 1)\epsilon_0(\pi - \theta)r^2/d. \quad (1 \text{ т.}) \quad (2.1)$$

2.2.1. Нека означим с C_0 максималния капацитет на кондензатора в началния момент време, отговарящ на $\theta = 0$. Горното равенство може да се презапише като:

$$C(\theta) = C_0 \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right), \quad (0,5 \text{ т.})$$

където $C_0 = (2N - 1)\epsilon_0\pi r^2/d$. Тъй като токът I във веригата остава постоянен, зарядът върху плочите на кондензатора ще се изменя по закона $q(t) = q_0 - It$. (1 т.) От друга страна падът на напрежението върху резистора и напрежението на плочите на кондензатора ще са равни. Така получаваме връзката:

$$IR = \frac{q(t)}{C(t)} = \frac{q_0 - It}{C(t)}. \quad (1 \text{ т.})$$

От горното уравнение може да изразим зависимостта на капацитета от времето:

$$C(t) = \frac{q_0 - It}{IR} \equiv C(\theta) = C_0 \left(1 - \frac{\theta}{\pi}\right). \quad (0,5 \text{ т.})$$

Ако положим $t = 0$, може да намерим големината на тока във веригата $I = q_0/RC_0$, (0,5 т.) откъдето за љгловата скорост ω , с която трябва да въртим плочите на кондензатора, получаваме:

$$\omega = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{\pi}{RC_0}. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (2.2)$$

2.2.2. Времето, τ , за което се разрежда кондензаторът, се получава от условието $q(\tau) = 0$ (1 т.):

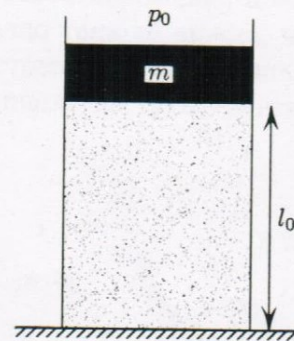
$$\tau = \frac{q_0}{I} = RC_0. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (2.3)$$

2.2.3. Отделеното количество топлина през резистора получаваме от закона на Джаул-Ленц (1 т.):

$$Q = I^2 R \tau = \frac{q_0^2}{C_0}. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (2.4)$$

Задача 3. Въздушна пружина

Бутало с маса m може да се движи без триене в дълъг вертикален цилиндър, пълен с газ (Фигура 4). В равновесно положение буталото се намира на височина l_0 от дъното на цилиндъра, както е показано на фигурата.



Фигура 4

3.1. Намерете налягането p_1 на газа, когато буталото се намира в равновесно положение. (1,5 т.)

3.2. Определете периода T и кръговата честота ω на малките трептения на буталото около равновесното му положение, ако площта на буталото е S , атмосферното налягане е p_0 , а газът е идеален. Разгледайте два случая:

3.2.1. Движението на буталото става много бавно, при което газът не променя температурата си; (4,5 т.)

3.2.2. Движението на буталото става много бързо и газът не обменя топлина с околната среда. В този случай може да разгледате термодинамичен процес, който се описва от уравнението $pV^\gamma = \text{const}$, където $\gamma = \text{const}$. (3,5 т.)

3.3. Разгледайте горните два случая, като не отчитате влиянието на атмосферното налягане. (0,5 т.)

Полезна математика: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, $|x| \ll 1$.

Полезна физика: кръговата честота е $\omega = 2\pi\nu$, където ν е честотата на трептенията.

Решение: 3.1. Налягането на газа, когато буталото е в равновесно положение, се определя от условието $mg + p_0 S = p_1 S$, (1 т.) откъдето за p_1 получаваме:

$$p_1 = \frac{mg + p_0 S}{S}. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (3.1)$$

3.2.1. Да разгледаме малко отклонение x на буталото от равновесното му положение, при което обемът на газа намалява с $\Delta V = xS$, а налягането му нараства с Δp . Вследствие на промяната на налягането на газа под буталото, на буталото ще действа допълнителна сила $F = \Delta p S$, насочена нагоре към равновесното му положение. Тъй като движението на буталото става много бавно, то температурата на газа не се променя. Тогава може да използваме, че:

$$pV = \text{const}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

откъдето:

$$p_1 l_0 S = (p_1 + \Delta p)(l_0 S - xS). \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тогава може да получим изменението на налягането:

$$\Delta p = \frac{p_1 x}{l_0 - x} = \frac{(mg + p_0 S)x}{S(l_0 - x)} \approx \frac{(mg + p_0 S)x}{Sl_0}, \quad (1 \text{ т.})$$

където сме отчели, че $l_0 \gg x$, т.е. $l_0 - x \approx l_0$. Така за допълнителната сила, която действа на буталото, получаваме:

$$F = -\frac{mg + p_0 S}{l_0} x. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Знакът минус показва, че силата е насочена към равновесното положение и е в противоположна посока на отместването на буталото. Също така се вижда, че силата има вида $F = -kx$, т.е. коефициентът пред отместването x има смисъл на коефициент на квазиеластичност, (0,5 т.) тогава за периода на трептенията, $T = 2\pi\sqrt{m/k}$, може да запишем:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{mg + p_0 S}}, \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (3.2)$$

а за кръговата честота, ω се получава:

$$\omega = \sqrt{\frac{mg + p_0 S}{ml_0}}. \quad (1 \text{ т.}) \quad (3.3)$$

3.2.2. При много бързо движение на буталото газът не може да обмени топлина с околната среда и процесът може да се разглежда като адиабатен. При адиабатен процес използваме, че:

$$pV^\gamma = \text{const},$$

което в конкретния случай се записва така:

$$p_1(l_0 S)^\gamma = (p_1 + \Delta p)(l_0 S - xS)^\gamma. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Аналогично на предния случай, за изменението на налягането може да получим:

$$\Delta p = \gamma \frac{x}{l_0} p_1, \quad (1,5 \text{ т.})$$

където сме отчели, че $\left(1 - \frac{x}{l_0}\right)^\gamma \approx \left(1 - \gamma \frac{x}{l_0}\right)$, тъй като цилиндърът е много висок и $l_0 \gg x$. От тук се вижда, че налягането нараства γ пъти в сравнение с изотермния случай. Така периодът и кръговата честота ще се изменят с множител равен на $\gamma^{1/2}$:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{ml_0}{(mg + p_0 S)\gamma}} \quad (0,5 \text{ т.}) \quad \text{и} \quad \omega = \sqrt{\frac{mg + p_0 S}{ml_0}} \gamma. \quad (1 \text{ т.}) \quad (3.4)$$

3.2.3. Заместваем $p_0 = 0$ в равенства (3.2) и (3.4) и получаваме периода на буталото без да отчитаме влиянието на атмосферното налягане:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{g}}, \quad T = 2\pi\sqrt{\frac{l_0}{\gamma g}}. \quad (0,5 \text{ т.}) \quad (3.5)$$

Вижда се, че в този случай периодът на буталото съвпада с периода на математично махало с дължина l_0 и l_0/γ .

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

17–19 ноември 2017 г., гр. Варна

Тема за 11.–12. клас, пета състезателна група

Задача 1. Тяло по наклонена равнина

Тяло с маса m се движи нагоре по наклонена равнина с ъгъл на наклона α (началното положение на тялото е показано на Фигура 1). Началната скорост на тялото е v_0 , а коефициентът на триене между тялото и равнината (и наклонената, и хоризонталната ѝ част) е μ ($\mu < \tan \alpha$).



Фигура 1

За следващите четири подусловия разгледайте движението на тялото по наклонената равнина и определете:

1.1. ускорението a на тялото като големина и посока, при движението му нагоре и надолу; (2 т.)

1.2. координатата x на тялото като функция на времето, при движението му нагоре и надолу; (2 т.)

1.3. времето t_n , за което тялото ще достигне максимална височина; (2 т.)

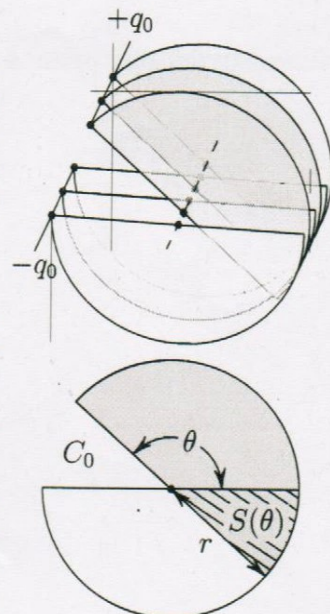
1.4. максималната височина, h_{max} , на която се издига тялото спрямо началното си положение ($t = 0$). (2 т.)

Приемете, че преходът между наклонената равнина и хоризонталния участък на Фиг. 1 е плавен, т.е. когато тялото преминава през него, се променя само посоката на скоростта му, но не и големината ѝ.

1.5. На какво разстояние се намира тялото, спрямо началното си положение ($t = 0$), при окончателното му спиране? (2 т.)

Задача 2. Кондензатор с променлив капацитет

2.1. За промяна на честотата на трептящ кръг в радиотехниката са се използвали кондензатори с променлив капацитет. Промяната на капацитета на такъв кондензатор става, като се промени ефективната площ на плочите на кондензатора. На Фигура 2 е показан кондензатор с променлив капацитет, който се състои от $2N$ на брой еднакви тънки плочи с формата на полукръг с радиус r . Плочите са разделени на два реда, условно бели и сиви, като плочите във всеки ред са свързани с проводници (плътните линии на горната част от Фиг. 2). Разстоянието между две съседни плочи от един ред (например белите) е d . Сивите плочи са поставени точно по средата между белите плочи и могат да се въртят около ос, минаваща през центъра на всеки от полукръговете – пунктираната линия от Фиг. 2. Определете капацитета C на кондензатора като функция на ъгъла на завъртане θ . При $\theta = 0$ капацитетът $C(0) = C_0$ е максимален. (3 т.)



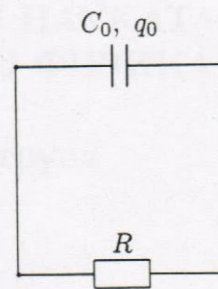
Фигура 2

2.2. Кондензатор с променлив капацитет е успоредно свързан с резистор със съпротивление R – Фигура 3. В началния момент кондензаторът е зареден до заряд q_0 , а капацитетът му е C_0 (кондензаторът от предното подусловие).

2.2.1. С каква ъглова скорост ω трябва да въртим плочите му, така че токът във веригата да остане постоянен? (4 т.)

2.2.2. За колко време τ кондензаторът ще се разрежи напълно? (1,5 т.)

2.2.3. Колко е отделеното количество топлина Q през резистора за това време? (1,5 т.)



Фигура 3

Задача 3. Въздушна пружина

Бутало с маса m може да се движи без триене в дълъг вертикален цилиндър, пълен с газ (Фигура 4). В равновесно положение буталото се намира на височина l_0 от дъното на цилиндъра, както е показано на фигурата.

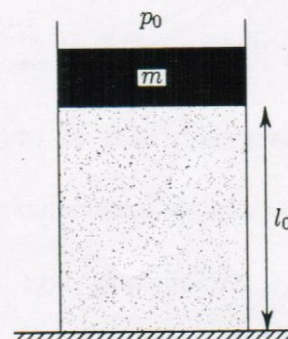
3.1. Намерете налягането p_1 на газа, когато буталото се намира в равновесно положение. (1,5 т.)

3.2. Определете периода T и кръговата честота ω на малките трептения на буталото около равновесното му положение, ако площта на буталото е S , атмосферното налягане е p_0 , а газът е идеален. Разгледайте два случая:

3.2.1. Движението на буталото става много бавно, при което газът не променя температурата си; (4,5 т.)

3.2.2. Движението на буталото става много бързо и газът не обменя топлина с околната среда. В този случай може да разгледате термодинамичен процес, който се описва от уравнението $pV^\gamma = \text{const}$, където $\gamma = \text{const}$. (3,5 т.)

3.3. Разгледайте горните два случая, като не отчитате влиянието на атмосферното налягане. (0,5 т.)



Фигура 4

Полезна математика: $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, $|x| \ll 1$.

Полезна физика: кръговата честота е $\omega = 2\pi\nu$, където ν е честотата на трептенията.