Министерство на образованието и науката
Национално есенно състезание по физика
Велико Търново, 14 – 15 ноември 2015 г.
Тема 10. клас, Решения и указания

Задача 1. а) Честотата на трептене ν_1 и периодът T_1 се определят с изразите

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1{,}6\ \text{Hz}, \textbf{[1 т.]} \qquad T_1 = \frac{1}{\nu_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}63\ \text{s}. \textbf{[1 т.]}$$

Началното положение на махалото съответства на максимално отклонение от равновесното му положение. Тогава амплитудата A_1 е равна на удължението Δl_1 на пружината в равновесие, като имаме

$$A_1 = \Delta l_1 = \frac{mg}{k} = 0{,}1\ \text{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) При движение на тялото от най-ниско до най-високо вертикално положение силата на тежестта е насочена противоположно на преместването. Тъй като тя е постоянна, работата W_1 е

$$W_1 = -G.2A_1 = -2mgA_1 = -1\ \text{J}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Работата W_2 на еластичната сила може да се оцени чрез изменението на потенциалната енергия E_p на деформираната пружина при движение от най-ниското положение 1 до най-високото й положение 2, при което имаме

$$W_2 = E_p(1) - E_p(2) = \frac{k(2A_1)^2}{2} - 0 = 2kA_1^2 = 1\ \text{J}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

в) В този случай имаме

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \approx 2{,}2\ \text{Hz}, \textbf{[1 т.]} \qquad T_2 = \frac{1}{\nu_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \approx 0{,}45\ \text{s}. \textbf{[1 т.]}$$

Тъй като равновесното положение на махалото се е отместило нагоре с $\Delta l_2 = mg/2k$, за амплитудата на трептене получаваме

$$A_2 = A_1 + \Delta l_2 = \frac{3mg}{2k} = 0{,}15\ \text{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

г) От втория закон на Нютон за ускорението намираме

$$a = \frac{kA_2}{m/2} = 3g \approx 30\ \text{m/s}^2. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

д) Търсената височина се дава с израза

$$h = A_2 - \frac{A_1}{2} = \frac{mg}{k} = 0{,}1\,\text{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

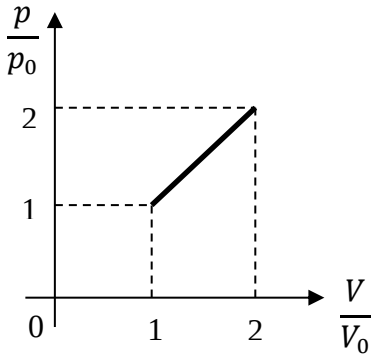
Задача 2. а) Нека означим коефициента на еластичност на пружината с k, а основата на цилиндъра с S. Когато дължината на еластичната пружина се измени с x, тя действа върху буталото със сила $F_1 = kx$ **[0,5 т.]**. От друга страна газът действа върху буталото със сила $F_2 = pS$ **[0,5 т.]**, където p е налягането на газа. При равновесие $F_1 = F_2$, откъдето следва

$$p = \frac{k}{S}x = \frac{k}{S^2}V \text{, т.е. } p = \alpha V. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) При разширение имаме

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V}{V_0}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Обемът на газа се променя от V_0 до $2V_0$, а налягането му ще се променя от p_0 до $2p_0$. На фиг. 1 е показана графиката на процеса. **[1 т.]**



Фиг. 1

в) От уравнението на състояние на газа за началната му температура T_0 имаме

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{B}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Максималната температура, която газът достига при разширението си, е

$$T_1 = \frac{2p_0.2V_0}{B} = 4T_0. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Следователно в интервала от температури $T_0 \to 4T_0$ имаме

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}B(T - T_0) + A, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

където A е извършената от газа работа. Тя отива за свиване на пружината, при което нараства потенциалната ѝ енергия, т.е.

$$A=\frac{kx^2}{2}-\frac{kl^2}{2}=\frac{k}{2S^2}V^2-\frac{k}{2S^2}V_0^2=\frac{1}{2}(pV-p_0V_0)=\frac{1}{2}B(T-T_0).$$ **[1 т.]**

Следователно при $T_0 \le T \le 4T_0$ имаме

$$T=T_0+\frac{1}{2B}Q.$$ **[1 т.]**

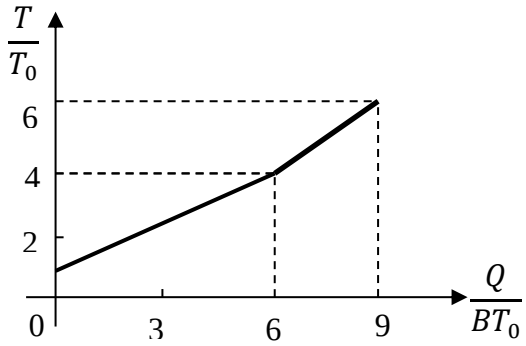
В температурния интервал $4T_0 \le T \le 6T_0$ нагряването става при постоянен обем. Тогава общото получено количество топлина Q се дава с израза

$$Q-Q_1=\Delta U=\frac{3}{2}B(T-T_1),$$ **[0,5 т.]**

където $Q_1=6BT_0$. Следователно за интервала $4T_0 \le T \le 6T_0$ имаме

$$T=T_1+\frac{2}{3B}(Q-Q_1).$$ **[1 т.]**

Зависимостта на температурата T от полученото количество топлина Q е показана на фиг. 2. **[1 т.]**



Фиг. 2

Задача 3. а) Във всеки момент t след затваряне на ключа K напрежението на кондензатора $U_C(t)=q(t)/C$ **[0,25 т.]** и напрежението между краищата на резистора $U_R(t)=I(t)R$ **[0,25 т.]** удовлетворяват равенството

$$U_0=U_C(t)+U_R(t)=\frac{1}{C}q(t)+I(t)R.$$ **[0,5 т.]**

Непосредствено след затваряне на ключа K имаме $U_C=0$ **[0,5 т.]** и следователно токът е

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$ **[0,5 т.]**

б) От връзката между напреженията можем да получим съотношение между изменението на заряда Δq на кондензатора и изменението на тока ΔI през резистора за време Δt, т.е.

$$\frac{1}{C}\Delta q + R\Delta I = 0.$$ **[1 т.]**

в) Тъй като $\Delta q \approx I\Delta t$ **[0,5 т.]**, имаме равенството

$$\Delta t = -RC\frac{\Delta I}{I}.$$ **[1 т.]**

г) Нека приемем, че $\Delta t = t_{1/2}$. Тъй като

$$\Delta I = \frac{I_0}{2} - I_0 = -\frac{I_0}{2},$$ **[1 т.]** $$I \approx \bar{I} = \frac{1}{2}\left(I_0 + \frac{I_0}{2}\right) = \frac{3I_0}{4},$$ **[1 т.]**

получаваме $t_{1/2} \approx \frac{2}{3}RC \approx 0{,}67RC$. **[1 т.]**

д) Докато продължава зареждането на кондензатора, през източника преминава заряд $q = CU_0$ **[0,5 т.]**, т.е. източникът извършва работа $A = qU_0$ **[0,5 т.]**. Част от тази работа отива за зареждането на кондензатора, а останалата част се трансформира в топлина, отделена от резистора, като е изпълнено равенството

$$qU_0 = \frac{1}{2}CU_0^2 + Q.$$ **[1т.]**

Следователно имаме

$$Q = \frac{CU_0^2}{2}.$$ **[0,5 т.]**