МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

http://astro-olymp.org

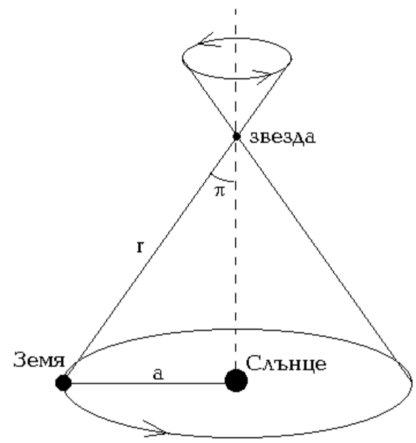
I кръг
Ученици от 9-10 клас – Решения

Задача 1. Разстояния в Космоса. Определянето на разстоянията до обектите в далечния Космос е една от най-важните задачи пред астрофизиката.

- Опишете (на не повече от половин страница всеки) три метода, чрез които астрономите измерват разстоянията до изучаваните от тях обекти. Нека поне един от тези методи да е подходящ за измерване на разстояния извън пределите на Млечния път.

Решение.

1. Първият метод, на който ще се спрем, се основава на явлението годишен паралакс на звездите. Това представлява отместването на видимото положение на една звезда поради движението на Земята по нейната орбита. Схематично, годишният паралакс е показан на Фигура 1.



Фигура 1. Паралакс. *Източник: https://astro-olymp.org/24.html*

На фигурата е показан частен случай, когато звездата се намира точно на 90º от равнината на земната орбита (еклиптиката). При такива условия, с течение на годината видимото положение на звездата описва окръжност с ъглов радиус π по небесната сфера, (приемаме земната орбита за кръгова). Този радиус е годишният паралакс на звездата. Използвайки го, можем да намерим разстоянието до нея. От показания триъгълник се вижда, че

$$\mathrm{tg}\,\pi = \frac{a}{r},$$

където $a = 1\ \mathrm{au}$ е радиусът на орбитата на Земята. Видно е, че колкото по-близо до нас е звездата, толкова по-голям годишен паралакс има тя. Понеже ъгълът π е много по-малък от 1 rad, можем да използваме приближението

$$\mathrm{tg}\,\pi \approx \pi\ [\mathrm{rad}] = \frac{a}{r}.$$

Ако паралаксът се измерва в секунди, а разстоянието в парсеци, то е в сила следното съотношение:

$$\pi\,[''] = \frac{1}{r\,[\mathrm{pc}]}$$

Звезди, които се намират на отстояние от еклиптиката по-малко от 90°, поради паралактичното си движение описват елипси с голяма полуос, равна на ъгъла π. Колкото по-близо до еклиптиката се наблюдава една звезда, толкова по-сплесната е тази елипса.

2. За определяне на разстоянията в астрономията се използват и т.нар. стандартни свещи. Това са обекти, чиято светимост или знаем, или можем да изчислим, чрез някаква друга тяхна наблюдателна характеристика.

Един вид стандартни свещи са променливите звезди от клас цефеиди. Те са пулсиращи звезди с огромна светимост, за които е установено, че има връзка между средната абсолютна звездна величина и периода на пулсация (зависимост период-светимост). *Точната формула не се изисква от учениците.* Този период може да бъде измерен от наблюдения и от него да се изчисли средната абсолютна звездна величина на цефеидата M. Също така, от наблюдения може да се измери средната видима звездна величина m. Тогава, използвайки формулата за модул на разстоянието

$$m - M = 5\lg r[\mathrm{pc}] - 5,$$

можем да определим разстоянието до цефеидата r.

Друг вид стандартни свещи са свръхновите от тип Ia. Те се причиняват от бели джуджета в тесни двойни системи, върху които акретира вещество от другия компонент на системата. Когато масата на бялото джудже надвиши границата на Чандрасекар (около 1,4 маси на Слънцето), то избухва и това се нарича свръхнова от тип Ia. Установено е, че този вид свръхнови имат сравнително еднакви (по-точно сравнително лесни за изчисляване) абсолютни звездни величини в момента, в който блясъкът им е максимален. Тази абсолютна звездна величина е приблизително $M \approx -19^{\mathrm{m}}$. От наблюдения можем да измерим видимата звездна величина в максимум на блясъка m и чрез горната формула да изчислим разстоянието до свръхновата. Това е един от методите, които се използват за измерване на разстояния до най-далечните обекти във Вселената.

3. Законът на Хъбъл-Льометр се използва в друг метод, чрез който могат да се измерват разстояния до галактики, които са на разстояние не по-малки от 10 Mpc от Млечния път. Съгласно този закон, ако дадена галактика се наблюдава на разстояние r от нас, то тя се отдалечава със скорост

$$V = Hr,$$

където H е константата на Хъбъл. Нейната стойност според съвременните измервания е около 70 (km/s)/Mpc.

А скоростта, с която една галактика се отдалечава от нас, може да бъде изчислена чрез измерване на червеното отместване z на линиите в нейния спектър. За малки стойности на z (<0.2) с добра точност може да се използва приблизителната формула

$$V = cz,$$

където c е скоростта на светлината.

<u>Критерии за оценяване (общо 10 т.):</u>

За назоваване на всеки от методите – ***3 т.*** *(3 × **1 т.**)*

За правилно и пълно описание на начина, по който методите се използват за измерване на разстояния – ***6 т.*** *(3 × **2 т.**)*

За наличие на метод, приложим за обекти извън Млечния път – ***1 т.***

При оценяването на тази задача трябва да се има предвид, че използваните от ученика методи за определяне на разстояния в Космоса могат да бъдат съществено различни от описаните в авторското решение. Ако обяснението е правилно и пълно, следва да се присъдят максимален брой точки.

Задача 2. Кълбовидният звезден куп M54. Кълбовидният звезден куп M54 е на разстояние 87400 светлинни години от нас и се наблюдава в съзвездието Стрелец. Масата му е 1,5 милиона слънчеви маси, а радиусът му – цели 153 ly (светлинни години).

- **А)** Въпреки че кълбовидните звездни купове са най-гъсто населените звездни системи, средната плътност на веществото в тях не е висока, тъй като по-голямата част от космоса е празно пространство. Средната плътност на въздуха при стайна температура е 1,2 kg/m^3. Колко пъти по-малка от това е средната плътност на купа M54? Масата на Слънцето е 2.10^{30} kg. **[2 т.]**
- **Б)** Какъв е видимият ъглов размер на купа по небето, в дъгови минути? Един градус е равен на 60 дъгови минути. **[2 т.]**
- **В)** Купът M54 всъщност принадлежи не директно на нашата галактика Млечен път, а на сфероидалната галактика-джудже в Стрелец, която е спътник на Млечния път. Това е и причината за огромното разстояние до купа. Потърсете информация в интернет и избройте още 4 галактики-спътници на Млечния път. **[2 т.]**
- **Г)** В кои месеци от годината M54 се наблюдава най-добре от България? **[2 т.]**
- **Д)** Някои изследвания показват, че в ядрото на M54 вероятно има черна дупка с маса 9400 слънчеви маси. Радиусът на една черна дупка в километри е приблизително $(M/M_{\odot}) \times 3$ km, където $(M/M_{\odot})$ е масата на черната дупка в слънчеви маси. Кои планети в Слънчевата система са по-големи от черната дупка в ядрото на M54? **[2 т.]**

Решение.

А) Формулата за обем на сфера с радиус R е

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Приемаме, че купът е сферичен, с маса M, и пресмятаме неговата средна плътност:

$$\rho = \frac{M}{V} = \frac{3M}{4\pi R^3}.$$

Превръщаме масата на купа в килограми: $M = (1{,}5.10^6) \cdot (2.10^{30})\ \mathrm{kg} = 3.10^{36}\ \mathrm{kg}$. Скоростта на светлината във вакуум е $c = 300\,000\ \mathrm{km/s} = 3.10^8\ \mathrm{m/s}$. Светлинната година е пътят, изминат от светлината за 1 година, което се равнява на $365{,}25\ .\ 24\ .\ 3600$ секунди. Така превръщаме радиуса на купа в метри:

$$R = (153)\ .\ (365{,}25.24.3600)\ .\ (3.10^8)\ \mathrm{m} = 1{,}448.10^{18}\ \mathrm{m}.$$

Заместваме във формулата за плътност и получаваме $\rho = 2{,}357.10^{-19}\ \mathrm{kg/m^3}$. Това е $\mathbf{5{,}1.10^{18}}$ **пъти** или 5,1 милиарда милиарда пъти по-ниска плътност от тази на въздуха в стайни условия. Въпреки че звездният куп съдържа няколко милиона звезди и има огромна маса, той има ниска средна плътност заради огромното пространство, което заема.

Б) Видимият ъглов размер на обект с радиус R на голямо разстояние r е

$$\delta = \frac{2R}{r} = \frac{2.153}{87400} = 0{,}00350\ \mathrm{rad} = 0{,}20° = \mathbf{12'}.$$

В) Най-масивните две галактики-спътници на Млечния път са Голям Магеланов облак и Малък Магеланов облак.

Други галактики-спътници на Млечния път са: Antlia 2, Sagittarius Dwarf, Crater 2, Canis Major Dwarf, Canes Venatici I, Sculptor Dwarf и т.н., общо над 35 малки галактики, включително галактики-джуджета в съзвездията Водна помпа, Скулптор, Стрелец, Чаша, Голямо куче, Ловджийски кучета, Лъв, Дракон, Херкулес и други.

Г) Купът M54 има отрицателна деклинация $(-30°)$ и се намира в лятното съзвездие Стрелец (ректасцензия $\sim 19^{\mathrm{h}}$). Може да се наблюдава единствено в **летните месеци**: юни, юли, август, септември.

Д) По формулата $R = (M/M_{\odot}) \times 3 \text{ km}$ пресмятаме радиуса на черната дупка в купа: $9400.3 \text{ km} = 28200 \text{ km}$. По-големи от нея са **Юпитер** (среден радиус 69 900 km) и **Сатурн** (среден радиус 58200 km). По-малки са останалите планети, включително Уран (радиус 25 400 km) и Нептун (радиус 24 600 km).

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

А) *Общо –* ***2 т.***

Б) *Общо –* ***2 т.***

В) *Общо –* ***2 т.*** *(4 ×* ***0,5 т****. за всяка галактика)*

Г) *Общо –* ***2 т.***

Д) *Общо –* ***2 т.***

Задача 3. Пръстените на Сатурн. Ако се намираме в горните слоеве на атмосферата на Сатурн, неговите пръстени биха представлявали много красива гледка в небето. Но само ако сме на подходящите места. Да си представим, че сме въвели координати на Сатурн, подобни на земните географски координати. За Сатурн ще ги наречем планетографски координати.

- **А)** Направете необходимите построения и измервания върху дадената ви снимка на Сатурн и определете от какви планетографски координати пръстените на планетата няма да се виждат. **[6 т.]**
- **Б)** Намерете информация за радиуса на Сатурн. Определете на каква минимална височина трябва да се издигнем над някой от полюсите на Сатурн, за да виждаме поне част от пръстените. Използвайте графичен метод, както и в първото подусловие. **[4 т.]**

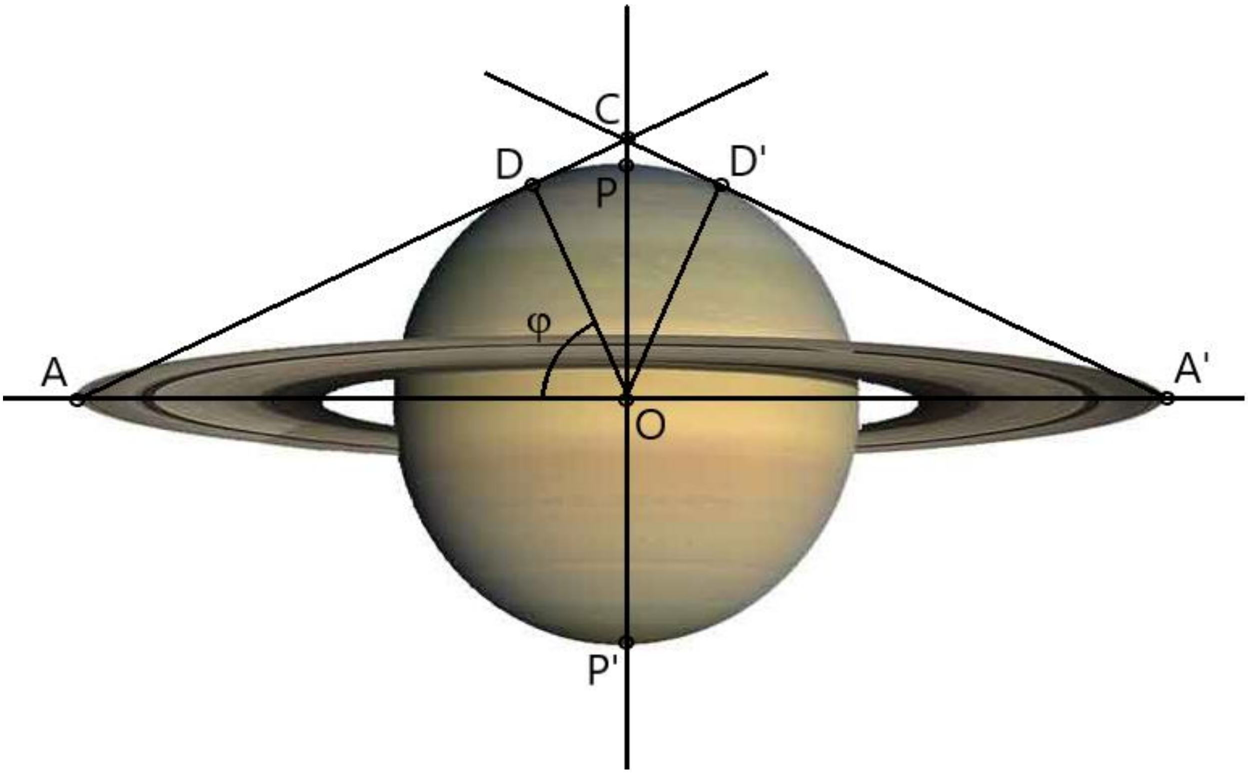
Решение.

А) От крайната точка A на пръстените прекарваме права линия, допирателна към Сатурн. Тя се допира до планетата в точка D. Прекарваме втора допирателна линия от другата страна на пръстените (A'D'). Двете допирателни линии се пресичат в точка C. За наблюдатели, намиращи се в точките D и D', крайните точки A и A' от пръстените на Сатурн ще бъдат на хоризонта. Ако приемем, че северният полюс на Сатурн е нагоре, то точките D и D' ще се намират на максималната северна планетографска ширина φ, от която пръстените могат да се виждат. Измерваме ъглите AOD и A'OD'. Те трябва да са равни на φ. На практика при нашия чертеж можем да не получим съвсем еднакви стойности за двата ъгъла поради неточностите при начертаването. В такъв случай намираме средната аритметична стойност. Получаваме $\varphi \approx 68°$.

Следователно областите, от които пръстените не могат да се виждат, се простират от северния полюс на планетата до паралела с 68° северна ширина и от южния полюс до паралела с 68° южна ширина.

Б) Минималната височина над полюса, от която може да се вижда поне част от пръстените, трябва да се равнява на отсечката PC. Измерваме дължината на тази отсечка и диаметъра на Сатурн PP' в милиметри и получаваме съответно 3.5 mm и 76 mm. Видът на пръстените ни показва, че оста на планетата не лежи в равнината на изображението. Но ъгълът, на който тя е наклонена към тази равнина, е малък и приблизително приемаме, че PP' е полярният диаметър на Сатурн. Според намерената от нас информация, полярният диаметър на планетата е 108728 km. Минималната височина в километри, на която трябва да се издигнем над някой от полюсите на Сатурн, за да виждаме поне част от пръстените, ще бъде

$$h = \frac{PC}{PP'} \cdot 108728\ \text{km} \approx 5000\ \text{km}.$$



<u>Критерии за оценяване (общо 10 т.):</u>

А) *За правилен теоретичен метод за определяне на областите, от които няма да се виждат пръстените –* ***2 т.***
За точни построения и измервания – ***2 т.***
За верни пресмятания и описание на областите – ***2 т.***

Б) *За правилен теоретичен метод за определяне на минималната височина над полюса на планетата, на която трябва да се издигнем –* ***1,5 т.***
За намиране на необходимите данни и измервания – ***1,5 т.***
За верен числен отговор за височината – ***1 т.***

Поради различните мащаби на отпечатването на картинката и неточностите при измерванията учениците могат да получат леко различаващи се числени отговори и за двете подусловия. Следва най-вече да се оценяват правилните разсъждения и начинът на работа.

Задача 4. Лунен спорт. Предстои ви да участвате в лунното първенство по баскетбол и трябва да тренирате. Вземете топка и излезте на открито място, например в училищния двор. Хвърлете с все сила топката право нагоре и после я уловете. Помолете ваш приятел да измери времето Δt от момента на хвърлянето на топката до момента на улавянето с помощта на хронометър или с приложението за секундомер на някой мобилен телефон.

- **А)** Изведете необходимите формули и пресметнете височината над нивото на ръцете ви, до която е достигнала топката, както и началната скорост, с която сте я изхвърлили. **[4 т.]**
- **Б)** Вече сте в спортната база на Луната. Намерете необходимата информация и пресметнете до каква височина би достигнала топката, ако я хвърлите вертикално със същата начална скорост, а също и времето на нейния полет. **[4 т.]**

Приемете, че можем да не отчитаме съпротивлението на въздуха.

- **В)** Как мислите, поради факта, че не се отчита съпротивлението на въздуха, дали получената от вас оценка за височината на полета на топката на Луната във второто подусловие е завишена или намалена в сравнение с действителната стойност? Разгледайте случаите на лунна спортна база в откритото безвъздушно пространство и лунна база, изпълнена с въздух под херметично покритие. **[2 т.]**

Решение.

А) Означаваме с $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$ земното ускорение, с H височината, до която достига топката, а с v_0 – началната скорост, с която я изхвърляме. Топката ще достигне до максималната височина H за време, равно на половината от измереното от нас време Δt. В този момент скоростта на топката ще стане равна на нула и тя ще започне да пада надолу. В сила са следните равенства:

$$H = v_0 \cdot 0{,}5\Delta t - g\frac{(0{,}5\Delta t)^2}{2}$$

$$v_0 - g.\,0{,}5\Delta t = 0$$

От второто уравнение за началната скорост на изхвърляне на топката получаваме

$$v_0 = 0{,}5g\Delta t.$$

Заместваме в първото уравнение и намираме

$$H = g\frac{(0{,}5\Delta t)^2}{2}.$$

Да приемем, че сме измерили време $\Delta t = 2{,}5$ секунди от момента на изхвърлянето на топката до момента, в който сме я уловили при нейното падане. Тогава с последните две уравнения получаваме.

$$H \approx 7{,}7\ \mathrm{m},$$

$$v_0 \approx 12\ \mathrm{m/s}.$$

Б) Намираме нужната информация за Луната. Нейната маса е $M = 7{,}348 \times 10^{22}\,\mathrm{kg}$, а лунният радиус е $R = 1737\,\mathrm{km}$. Ускорението на силата на тежестта на лунната повърхност ще бъде

$$g_L = G \cdot \frac{M}{R^2},$$

където $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\mathrm{m^3/kg.s^2}$ е гравитационната константа. Така

$$g_L \approx 1{,}62\ \mathrm{m/s^2}.$$

Можем и да не пресмятаме ускорението на силата на тежестта на Луната по този начин, а да намерим направо информация за неговата стойност.

Ако на Луната изхвърлим нашата топка със скорост v_0 (която зависи само от възможностите на тялото ни), то за максималната височина и времето на полета можем да пресметнем следните стойности:

$$\Delta t_L = \frac{v_0}{0{,}5g_L} \approx 15{,}1\ \mathrm{s},$$

$$H_L = g_L\frac{(0{,}5\Delta t_L)^2}{2} \approx 46\ \mathrm{m}.$$

Следователно, тъй като ускорението на силата на тежестта на Луната е около 6 пъти по-малко от земното ускорение, на лунната повърхност ние ще можем да изхвърлим топката на 6 пъти по-голяма височина и времето на нейния полет ще бъде 6 пъти по-дълго, отколкото на Земята.

В) 1. Лунна база във вакуум. Като междинна стъпка трябва да разберем дали изчислената от нас стойност за началната скорост на хвърляне v_0 е повече или по-малка от истинската v_{0r}. За целта е нужно да видим дали времето на движение на топката се оказва по-дълго или по-кратко спрямо времето на движение във вакуум при същата начална скорост.

Нека хвърляме топката с фиксирана начална скорост v_{0r}. Предварително отбелязваме, че силата на въздушно съпротивление извършва отрицателна работа върху топката, така че скоростта ѝ при улавяне е непременно по-малка от v_{0r}. Сега разделяме движението на топката на два етапа, издигане за време t_1 и спускане за време t_2. Първо изследваме издигането. Скоростите ще считаме за положителни, когато са насочени нагоре, и оттук нататък знака „Δ“ ще запазим само за означаване на малки величини.

Записваме втория принцип на механиката при наличие на сила на съпротивление

$$m\frac{\Delta v}{\Delta t} = -mg - f(v),$$

където масата на топката е m, ускорението на топката е записано като $\Delta v/\Delta t$, а $f(v)$ съответства на силата на съпротивление и е винаги положителна функция. Преобразуваме уравнението до

$$\Delta t = -\frac{m\Delta v}{mg + f(v)},$$

което съпоставя дадено малко изменение на скоростта Δv (< 0) със съответстващото му нужно за него малко време.

По същество процесът на издигането на топката може да се разбие на множество еднакви малки стъпки на намаляване на скоростта, поради които тя общо пада от v_{0r} до 0. Ако нямаше съпротивление, времето за една такава стъпка на намаляване на скоростта щеше да е

$$\Delta t = -\frac{m\Delta v}{mg},$$

което е по-голямо в сравнение с резултата от по-горната формула, отчитаща сила на съпротивление. Подчертаваме, че това е вярно за коя да е от стъпките. Оттук следва, че етапът на издигане отнема по-малко време, когато има сила на въздушно съпротивление, като точната форма на тази сила всъщност е без значение.

Сега изследваме спускането. Ако има съпротивление, то спускането обхваща поредица от стъпки с намаляване на скоростта от 0 до стойност малко над $-v_{0r}$. За всяко фиксирано по големина намаляване на скоростта Δv може да запишем

$$\Delta t = -\frac{m\Delta v}{mg - f(v)}$$

Този път това е повече от времето за намаляване с Δv ако няма съпротивление, което е

$$\Delta t = -\frac{m\Delta v}{mg}.$$

В обратната посока действа това, че при наличие на съпротивление спускането съдържа по-малко на брой интервали Δt, тъй като крайната скорост не достига до $-v_{0r}$.

Изглежда, че не е очевидно дали спускането със съпротивление отнема повече или по-малко време спрямо това във вакуум. Оттук не е и ясно дали общото време става повече или по-малко.

Оказва се, че това е много сложна задача, която зависи от точния модел за силата на съпротивление. Нека направим справка в Интернет, ограничавайки се до зависимости от типа $f(v) = \alpha|v|^n$. За тях се доказва, че при $n \geq 1$ времето за движение със съпротивление *винаги* е по-малко, а при $n < 1$ отговорът се определя от точната големина на началната скорост [1]. При нормални атмосферни условия [2] може да приемем $n = 2$. Сега вече отговаряме, че ако премахнем атмосферата, времето за движение на топката $\Delta t'$ би следвало да е по-голямо от измереното $\Delta t = 2{,}5\ \mathrm{s}$. Връщайки се на уравненията

$$v_0 = 0{,}5g\Delta t, \qquad v_{0r} = 0{,}5g\Delta t',$$

които са верни при отсъствие на атмосфера, заключаваме, че реалната начална скорост е $v_{0r} > v_0 = 12\ \mathrm{m/s}$.

И така, оценката ни за височина на полета във вакуум на Луната се оказва **занижена**, тоест реалната стойност ще е над $H_L \approx 46\ \mathrm{m}$.

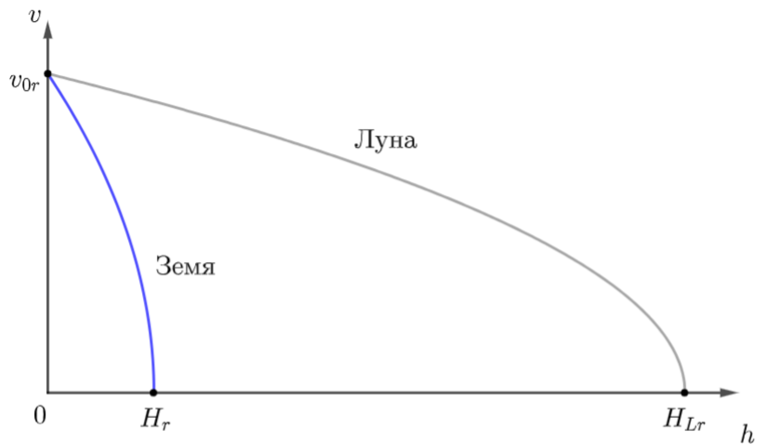
2. Лунна база с атмосфера. Тук ще използваме различен подход. Отново с H и H_L бележим теоретично изчислените максимални височини спрямо измереното Δt. Сега с H_r и H_{Lr} означаваме реалните максимални височини при наличие на атмосфера, съответно на Земята и Луната. Също така, с A и A_L означаваме модулите на работата на силата на триене върху топката от хвърлянето ѝ до достигането на максимална височина, съответно на Земята и Луната. Както и преди, реалната начална скорост на топката е $v_{0r} > v_0$.

Записваме закона за запазване на енергията в случаите със и без атмосфера:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH = mg_LH_L,$$

$$\frac{mv_{0r}^2}{2} = A + mgH_r = A_L + mg_LH_{Lr}.$$

При нормални скорости на хвърляне силата на съпротивление върху топката като цяло е доста по-малка от гравитационната сила, така че именно гравитацията е определяща за намаляването на скоростта, по-точно за зависимостта на скоростта v от височината h. Тогава от графиката на тази зависимост $v(h)$ проличава, че A_L е значително по-голяма от A.



Фигура 1. Графика на $v(h)$ за Земята и Луната, когато ефектите от съпротивлението на въздуха са сравнително малки.

Това е така, защото силата на съпротивление $f(v)$ е пропорционална на $|v|^2$, а работата ѝ допълнително зависи от изминатото разстояние, тоест $A \propto f\Delta h$. На Луната силата на съпротивление не само остава по-голяма, и действа върху по-голямо изминато разстояние. И след като $A_L > A$, може да запишем

$$mg_LH_{Lr} = mgH_r + (A - A_L) < mgH_r < mgH,$$

$$H_{Lr} < \left(\frac{g}{g_L}\right)H = H_L.$$

Теоретичната оценка за височина на полета се оказва **завишена** спрямо истинската, която ще е под $H_L \approx 46$ m.

Литература:

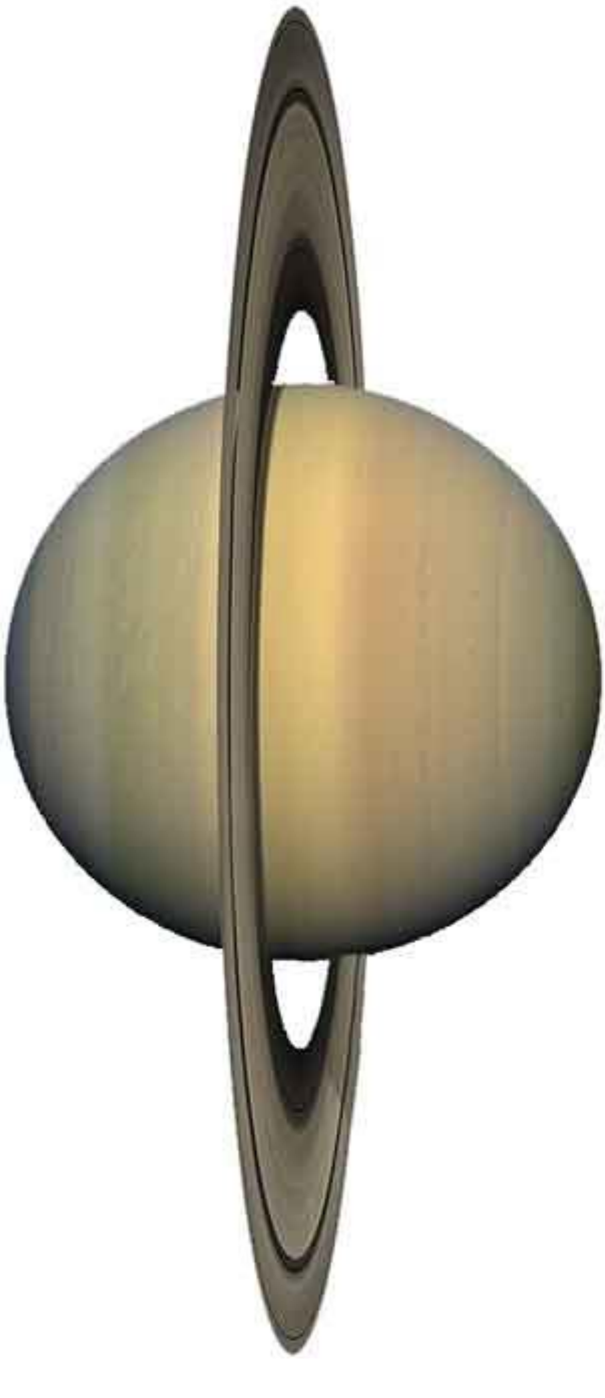
[1] https://pubs.aip.org/aapt/ajp/article-abstract/89/1/67/1045747/A-vertical-race-up-and-back-down-with-and-without
[2] https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_(physics)#The_drag_equation

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

А) *За правилно извеждане на формулите за началната скорост и височината на полета на топката на Земята –* ***3 т.***
За числени пресмятания – ***1 т.***

Б) *За намиране на информация за гравитационното ускорение на Луната –* ***1 т.***
За пресмятане на височината и времето на полета на Луната – ***3 т.***

В) *За правилни разсъждения относно неотчитането на съпротивлението на въздуха и неговото влияние върху получените резултати –* ***2 т.***
Забележка: *От учениците не се изисква подробният анализ, даден в настоящото решение. Достатъчно е те да приведат кратки съображения, водещи до извода, че е трудно с определеност да предскажем в каква посока ще повлияе ефектът от неотчитането на съпротивлението на въздуха върху нашите оценки за търсените величини.*



Сатурн и неговите пръстени – към Задача 3.