МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

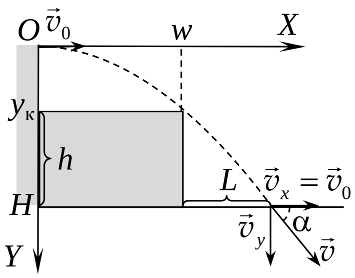
Областен кръг на олимпиадата по физика, 18 февруари 2024 г.

Решения на темата за V състезателна група (учебно съдържание за 11. клас) и критерии за оценяване

Дадените решения са примерни. Всяко обосновано алтернативно решение се оценява по критерии на областната комисия, но в рамките на максималния брой точки за дадена задача и за дадено подусловие.

Задача 1. Скок като на кино

а) Избираме координатна система с начало в точката на скачане (ръба на сградата), хоризонтална ос X и ос Y с посока вертикално надолу, както е показано на фигурата.



Движението по оста X е равномерно и се описва със закона:

(1) $$x = v_0 t$$ **[1,0 т]**

По оста Y движението е равноускорително с ускорение g и с нулева компонента на началната скорост:

(2) $$y = \frac{gt^2}{2}$$ **[1,0 т]**

Y-координата на покрива на контейнера е:

(3) $$y_к = H - h$$ **[0,5 т]**

Следователно велосипедът се оказва на височината на контейнера в момента:

(4) $$t_1 = \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}}$$ **[0,5 т]**

За да прелети велосипедът над контейнера, е нужно $x(t_1) \geq w$, т.е.

(5) $$v_0 t_1 = v_0 \sqrt{\frac{2(H-h)}{g}} \geq w$$

Следователно минималната начална скорост е:

(6) $$v_0 = w\sqrt{\frac{g}{2(H-h)}} \approx 7{,}0\,\mathrm{m/s}.$$ **[1,0 т]**

(0,5 т за буквен отговор + 0,5 т за верен числен отговор със записана единица)

б) В момента, когато велосипедът достига пътя, $y = H$. Следователно общото време на полета е:

(7) $$t_2 = \sqrt{2H/g}$$ **[0,5 т]**

Хоризонталната координата в този момент е:

(8) $$x_2 = v_0 t_2,$$ **[0,5 т]**

а разстоянието до стената на контейнера – съответно:

(9) $$L = x_2 - w = w\left(\sqrt{\frac{H}{H-h}} - 1\right) \approx 2{,}6\ \mathrm{m}.$$ **[1,0 т]**

(0,5 т за буквен отговор + 0,5 т за верен числен отговор със записана единица)

в) Компонентата на скоростта по Y е в момента на приземяването е:

(10) $$v_y = g t_2 = \sqrt{2gH}$$ **[1,0 т]**

От друга страна, хоризонталната компонента на скоростта не се променя:

(11) $$v_x = v_0$$ **[1,0 т]**

За ъгъла α е изпълнено:

(12) $$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{v_y}{v_x} = 2\frac{\sqrt{H(H-h)}}{w} \approx 1{,}405$$ **[1,0 т]**

От таблицата на тригонометричните функции виждаме, че на тази стойност на тангенса най-точно съответства ъгъл:

(13) $$\alpha \approx 55°.$$ **[1,0 т]**

Задача 2. Балистично махало

а) Ударът е абсолютно нееластичен, защото куршумът и дъската продължават да се движат като едно цяло тяло. Следователно част от кинетичната енергия се преобразува във вътрешна енергия (топлина) и механичната енергия не се запазва. **[0,5 т]** Импулсът също не се запазва, защото в момента на удара в горния край на дъската действа сила на реакция от страна на оста. **[0,5 т]** Запазва се единствено моментът на импулса спрямо оста, защото всички външни сили или са приложени в оста, или действат по права, минаваща през оста. **[0,5 т]** б) Куршумът попада на разстояние $r = \ell/2$ от оста на въртене със скорост, перпендикулярна на радиус-вектора. Следователно преди удара моментът на импулса на куршума е:

(1) $$L_0 = mv_0 r = mv_0 \frac{\ell}{2}.$$ **[0,5 т]**

След удара дъската и куршумът образуват едно цяло тяло с инерчен момент спрямо оста на въртене:

(2) $$I = \frac{1}{3}M\ell^2 + mr^2 = \left(\frac{1}{3}M + \frac{1}{4}m\right)\ell^2.$$ **[0,5 т]**

Моментът на импулса на системата дъска + куршум след удара е:

(3) $$L = I\omega.$$ **[0,5 т]**

От закона за запазване на момента на импулса, $L_0 = L$, следва:

(4) $$mv_0 \frac{\ell}{2} = \left(\frac{1}{3}M + \frac{1}{4}m\right)\ell^2\omega,$$ [**1,0 т**]

Откъдето намираме ъгловата скорост на дъската след удара:

(5) $$\omega = \frac{6mv_0}{(4M + 3m)\ell}.$$ [**1,0 т**]

в) След удара системата продължава да се люлее без триене в оста, т.е. пълната механична енергия ще се запазва. Кинетичната енергия на системата след удара е:

(6) $$E_\text{к} = \frac{I\omega^2}{2} = \frac{3m^2v_0^2}{2(4M + 3m)}.$$ **[1,0 т]**

В момента на максимално отклонение центърът на масата на системата се издига на височина:

(7) $$h = \frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta_\text{max})$$ **[1,0 т]**

и съответно потенциалната енергия на системата е:

(8) $$E_\text{п} = (M + m)gh = (M + m)g\frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta_\text{max}).$$ **[1,0 т]**

От закона за запазване на механичната енергия, $E_\text{к} = E_\text{п}$, получаваме:

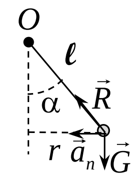
(9) $$\frac{3m^2v_0^2}{2(4M + 3m)} = (M + m)g\frac{\ell}{2}(1 - \cos\theta_\text{max})$$ **[1,0 т]**

и намираме началната скорост:

(10) $$v_0 = \frac{\sqrt{3(M + m)(4M + 3m)g\ell(1 - \cos\theta_\text{max})}}{3m} \approx 470\,\text{m/s}.$$ **[1,0 т]**

(0,5 т за верен израз и 0,5 т за числена стойност. Числената стойност се приема за вярна, ако след закръгляне към число, кратно на 10 m/s, дава 470 m/s.)

Задача 3. Кръгови траектории



а) На топчето действат две сили – силата на тежестта $\vec{G}$ надолу, и силата на опън $\vec{R}$ на нишката към точката на окачване.

За всяка сила с правилно означена посока × 0,5 т; общо [1,0 т]

Когато обикаля по окръжност с радиус r, топчето има центростремително (нормално) ускорение:

(1) $$a_n = \frac{v_0^2}{r}$$ **[1,0 т]**

в хоризонтална посока – към оста на въртене. Пълен брой точки се дава само ако е даден изразът за ускорението и е указана неговата посока – словесно или на чертеж. Ако посоката не е дадена, а е написана само формула, се отнемат 0,5 т.

Радиусът на окръжността се дава с израза:

(2) $$r = \ell \sin \alpha.$$ **[0,5 т]**

Въвеждаме координатна система с хоризонтална ос X в посока от топчето към оста на въртене и вертикална ос Y. Вторият принцип на механиката $m\vec{a}_n = \vec{G} + \vec{R}$, записан в проекции по осите на координатната система, има вида:

(3) $$\frac{mv_0^2}{\ell \sin \alpha} = R \sin \alpha \quad (\text{по } X);$$ **[0,5 т]**

(4) $$mg - R \cos \alpha = 0 \quad (\text{по } Y).$$ **[0,5 т]**

Пълният брой точки за (3) и (4) се дава и при друг избор на координатна система, стига векторите на силите и ускорението да са правилно проектирани.

След кратки алгебрични преобразования на уравнения (3) и (4), намираме търсената скорост:

(5) $$v_0 = \sin \alpha \sqrt{\frac{g\ell}{\cos \alpha}}.$$ **[1,0 т]**

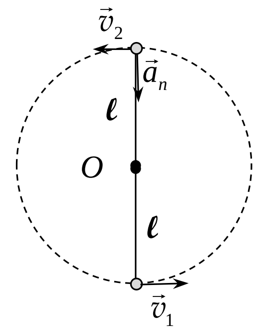
Обиколката на окръжността е:

(6) $$s = 2\pi r = 2\pi \ell \sin \alpha.$$ **[0,5 т]**

Следователно периодът на обикаляне е:

(7) $$T = \frac{s}{v_0} = 2\pi \sqrt{\frac{\ell \cos \alpha}{g}}.$$ **[0,5 т]**

б) Нека v_2 е скоростта на топчето, когато минава през най-високата точка от окръжността, т.е. вертикално над точката на окачване. От закона за запазване на механичната енергия имаме:



(8) $$\frac{mv_1^2}{2} = \frac{mv_2^2}{2} + 2mg\ell\,.$$ **[1,0 т]**

В най-високата точка топчето има само нормално ускорение с посока към т. O:

(9) $$a_n = \frac{v_2^2}{\ell}\,.$$ **[0,5 т]**

Точките се дават само ако е даден изразът за ускорението и е указана неговата посока – словесно или на чертеж.

В най-високата точка силите $\vec{G}$ и $\vec{R}$ действат в посока към т. O – словесно обяснение или чертеж. **[0,5 т]**

От II принцип на механиката:

(10) $$m\frac{v_2^2}{\ell} = mg + R\,.$$ **[0,5 т]**

За да опише топчето окръжност, нишката през цялото време трябва да бъде опъната, т.е. $R > 0$. Следователно минималната възможна скорост съответства на случая, когато в момента на минаване през горно положение:

(11) $$R = 0.$$ **[1,0 т]**

В този случай скоростта на топчето в най-високата точка е:

(12) $$v_2 = \sqrt{g\ell}.$$

Като заместим тази стойност в закона за запазване на механичната енергия, получаваме търсената начална скорост:

(13) $$v_1 = \sqrt{5gl}\,.$$ **[1,0 т]**