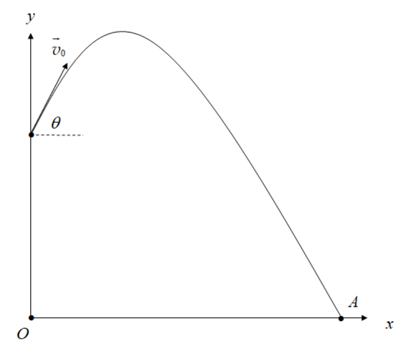
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

Враца, 29–31 март 2024 г.

Решения на темата за V състезателна група (11.-12. клас)

Задача 1. Гюлетласкач



а) Избираме координатна система с оси x и y, както е показано на фиг. 1. Написваме закона за движение по двете оси:

(1) $x = v_0 t\cos\theta$ **[0,5 т]**

(2) $y = h + v_0 t\sin\theta - \dfrac{gt^2}{2}$ **[0,5 т]**

В случая, когато $h = 0$, времето за достигане на точка A се получава от условието $y(t_A) = 0$. **[1,0 т]**

Тогава получаваме $0 = v_0 t_A \sin\theta - gt_A^2/2$ и намираме $t_A = 2v_0\sin\theta/g$. Заместваме полученото t_A в уравнение (1), за да получим далечината на полета:

(3) $l(\theta) = x(t_A) = \dfrac{v_0^2\sin 2\theta}{g}$ **[1,0 т]**

Максималното $l(\theta)$ се получава при $\sin 2\theta_0 = 1$, т.е. при $\theta_0 = 45^\circ$. **[1,0 т]**

б) Нека сега $h \neq 0\,\mathrm{m}$. Ще поставим въпроса под какъв ъгъл трябва да бъде изстреляно тялото така, че да достигне определена далечина l. В момента на достигане в точка A отново използваме условието $y(t_A) = 0$:

(4) $h + v_0 t_A\sin\theta - \dfrac{gt_A^2}{2} = 0$ **[1,0 т]**

Отново имаме $l = v_0 t_A\cos\theta$, откъдето $t_A = l/v_0\cos\theta$. Заместваме времето в уравнение (4), като имаме предвид, че $1/\cos^2\theta = 1 + \mathrm{tg}^2\,\theta$. След кратки алгебрични преобразования за $\mathrm{tg}\,\theta$ се получава квадратно уравнение:

(5) $\mathrm{tg}^2\theta - \dfrac{2v_0^2}{gl}\,\mathrm{tg}\theta + 1 - \dfrac{2v_0^2 h}{gl^2} = 0$ **[1,0 т]**

Корените на уравнението са:

(6) $$\mathrm{tg}\theta = \frac{v_0^2}{gl}\left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{g^2 l^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2}}\right)$$ **[1,0 т]**

За да може гюлето да достигне зададеното разстояние, е нужно уравнението да има поне един корен, т.е. дискриминантата да е неотрицателна:

(7) $$1 - \frac{g^2 l^2}{v_0^4} + \frac{2gh}{v_0^2} \geq 0$$ **[1,0 т]**

Оттука следва, че максимално достижимата далечина е:

(8) $$l_{\max} = \frac{v_0^2}{g}\sqrt{1 + \frac{2gh}{v_0^2}}$$ **[1,0 т]**

Тогава за оптималния ъгъл на изстрелване се получава:

(9) $$\mathrm{tg}\theta_1 = \frac{1}{\sqrt{1 + 2gh/v_0^2}}$$ **[0,5 т]**

Вижда се, че при $v_0^2 \gg 2gh$, $\mathrm{tg}\theta_1 \approx 1$, т.е. $\theta_1 \approx \theta_0 = 45^0$. **[0,5 т]**

в) Заместваме $\theta_1 = \pi/4 + \delta$ в $\mathrm{tg}\theta_1$:

(10) $$\mathrm{tg}\left(\pi/4 + \delta\right) = \frac{\mathrm{tg}(\pi/4) + \mathrm{tg}\delta}{1 - \mathrm{tg}(\pi/4)\mathrm{tg}\delta} = \frac{1 + \mathrm{tg}\delta}{1 - \mathrm{tg}\delta}$$ **[1,0 т]**

Точката се дава за всяко тригонометрично преобразование, което се свежда до tg δ или sin δ. Заместваме в уравнение (9):

(11) $$\frac{1 + \mathrm{tg}\delta}{1 - \mathrm{tg}\delta} = \left(1 + \frac{2gh}{v_0^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

Използваме приближението: $\mathrm{tg}\delta \approx \delta$ (или sin $\delta \approx \delta$) и:

(12) $$\left(1 + 2gh/v_0^2\right)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - 2gh/v_0^2,$$ **[1,0 т]**

след което получаваме търсения приблизителен израз:

(13) $$\delta \approx -\frac{gh}{2v_0^2}$$ **[1,0 т]**

В получената формула ъгълът е изразен в радиани:

(14) $$\delta \approx -\frac{9{,}81\ \mathrm{m/s^2}\ .\ 2\ \mathrm{m}}{2\,.\,(14\ \mathrm{m/s})^2} \approx -0{,}05\ \mathrm{rad}$$ **[0,5 т]**

Ъгълът в градуси е съответно:

(14) $$\delta \approx -0,05\ \text{rad}\ .\ \frac{180^\circ}{\pi\ \text{rad}} \approx -3^\circ$$ **[0,5 т]**

Тогава: $$\theta_1 = 45^\circ + \delta \approx 45^\circ - 3^\circ = 42^\circ .$$ **[1,0 т]**

Точката за крайна числена стойност на θ_1 се дава и на ученици, които не са получили израза за δ, а директно са изразили и пресметнали:

$$\theta_1 = \text{arctg}\left(\frac{1}{\sqrt{1+2gh/v_0^2}}\right) \approx 42^\circ$$

Задача 2. А. а) Изменението на скоростта ще определим от уравнението на движение, записано във вида

$$m\Delta\upsilon = F(t)\Delta t .$$ **(0,5 т.)**

За да намерим $\Delta\upsilon$ ще използваме аналогията с равенството

$$\Delta s = \upsilon(t)\Delta t$$ **(0,5 т.)**

при равнопроменливо движение. Изминатия път Δs за време t_0 е

$$\Delta s = \upsilon_{\text{ср}} t_0 = \frac{\upsilon + \upsilon_0}{2} t_0 .$$ **(0,5 т.)**

Тъй като графиките на $\upsilon(t)$ и $F(t)$ са аналогични, имаме

$$m\Delta\upsilon = F_{\text{ср}} t_0 = \frac{F_{\max} t_0}{2} .$$ **(0,5 т.)**

Следователно получаваме

$$\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_0 = \frac{F_{\max} t_0}{2m} \approx 12\ \text{m/s} .$$ **(0,5 т.)**

Друго възможно решение. Записваме уравнението на движение във вида

$$m\frac{d\upsilon}{dt} = F(t) .$$

Тогава имаме

$$d\upsilon = \frac{1}{m} F(t) dt .$$

Като интегрираме по интервала, в който действа силата, намираме

$$\Delta\upsilon = \upsilon - \upsilon_0 = \frac{1}{m}\int_0^{t_0} F(t)dt = \frac{F_{\max} t_0}{2m} .$$

Тук е отчетен геометричния смисъл на интеграла – лицето на фигурата, образувана от графиката на функцията $F(t)$ и оста t, т.е. лицето на триъгълника.

б) Извършената от силата работа A е

$$A = \frac{m\upsilon^2}{2} - \frac{m\upsilon_0^2}{2} \approx 45\ \text{J}. \qquad \textbf{(1 т.)}$$

Б. В момента t, когато нивото на водата в чашата е $h(t)$, действащата сила F върху дъното на чашата е сума от две сили

$$F = F_1 + F_2. \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

Първата сила се дължи на хидростатичното налягане и се дава с израза

$$F_1 = \rho g h(t) S. \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

Втората сила се определя от изменението на импулса на водата от струята, попаднала в чашата за една секунда. Скоростта на струята при попадане в чашата е

$$\upsilon = \sqrt{2g\left[H - h(t)\right]}. \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

За една секунда нивото на водата се повишава с

$$\Delta h = \frac{Q}{S}, \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

като масата на тази вода е

$$m = \rho S \Delta h. \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

Следователно за втората сила имаме израза

$$F_2 = m\upsilon = \rho Q \sqrt{2g\left[H - h(t)\right]}. \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

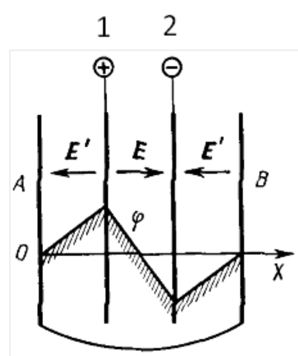
Като отчетем равенството

$$h(t) = \Delta h.t = \frac{Q}{S}t, \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

намираме

$$F = \rho g Q\left\{t + \sqrt{\frac{2}{g}\left(H - \frac{Q}{S}t\right)}\right\}. \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

В. а) Положителният заряд q се разпределя по вътрешната и по външната страна на пластината 1. Аналогично отрицателният заряд се разпределя по пластината 2. Тогава пластината A се наелектризира отрицателно, а пластината B – положително, като индуцираният заряд се разполага само на вътрешната страна. **(0,25 т.)** Между 1 и 2 възниква еднородно поле с интензитет E, а между 1 и A, както и между B и 2, поле с интензитет E', което има посока противоположна на E.**(0,25 т.)** Тъй като потенциалът на полето е зададен с точност до неопределена константа, ще изберем за нула потенциала на A. Потенциалът на B също ще е равен на нула, Като отчетем, че по силовата линия на полето потенциалът намалява, ходът на потенциала е показан на фиг. 2.1. Тук е отчетена симетрията на задачата. **(0,25 т.)**



Фиг. 2.1 **(1 т.)**

б) Ако означим напрежението между пластините 1 и 2 с U, а между 1 и A, както и между B и 2 с U', ще е изпълнено равенството

$$U = 2U'. \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

Тъй като зарядът на вътрешната страна на пластината 1 е q_1, а на външната – q_2, имаме

$$q_1 = 2q_2. \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

От друга страна е в сила равенството

$$q_1 + q_2 = q, \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

което означава

$$q_1 = \frac{2}{3}q, \qquad q_2 = \frac{1}{3}q. \qquad \textbf{(1 т.)}$$

Тогава намираме

$$U = Ed = \frac{q_2 d}{\varepsilon_0 S} = \frac{q}{C}, \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

т.е. окончателно получаваме

$$C = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_0 S}{d}. \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

Г. а) Ще изберем неподвижна отправна система K, свързана с неутронното огледало. Оста x насочваме успоредно на огледалото по посока на хоризонталната скорост на неутрона, а оста z – перпендикулярно на огледалото, насочена нагоре, като нулата на потенциалната енергия на неутрона съвпада с повърхнината на огледалото. Тогава за енергията на неутрона имаме израза

$$E = \frac{m_\mathrm{n}\upsilon_0^2}{2} + \frac{m_\mathrm{n}\upsilon_z^2}{2} + m_\mathrm{n} g z. \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

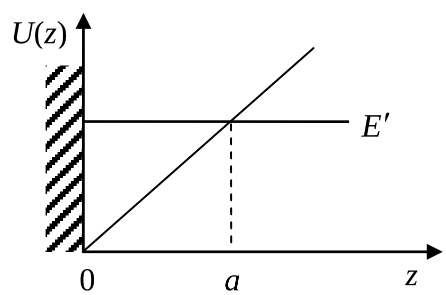
Той може да се препише във вида

$$E' = E - \frac{m_\mathrm{n}\upsilon_0^2}{2} = \frac{m_\mathrm{n}\upsilon_z^2}{2} + m_\mathrm{n} g z = \frac{p_z^2}{2m_\mathrm{n}} + m_\mathrm{n} g z, \qquad \textbf{(0,25 т.)}$$

което означава едномерно движение на частицата с енергия E' в потенциалната яма

$$U(z) = \begin{cases} \infty, & z < 0 \\ m_\mathrm{n} g z, & z \ge 0 \end{cases}, \qquad \textbf{(0,5 т.)}$$

чиято графика има вида (фиг. 2.2). **(0,5 т.)**



Фиг. 2.2

б) За да оценим минималната височина над неутронното огледало, ще използваме съотношението за неопределеност на Хайзенберг $\Delta z \Delta p_z \sim \hbar$.**(0,25 т.)** Както се вижда от фиг. 2.2, неопределеността в положението на неутрона е $\Delta z \approx a$ **(0,5 т.),** която съответства на областта на възможно движение в класическия случай. Тогава за неопределеността на импулса имаме

$$\Delta p_z \approx \frac{\hbar}{a}.$$ **(0,25 т.)**

Тъй като $p_z \sim \Delta p_z$, за енергията получаваме израза

$$E'(a) \approx \frac{\hbar^2}{2m_\mathrm{n}a^2} + m_\mathrm{n}ga.$$ **(0,25 т.)**

Минималната възможна стойност на енергията се определя от условието

$$\frac{dE'}{da} = -\frac{\hbar^2}{m_\mathrm{n}a^3} + m_\mathrm{n}g = 0,$$ **(0,25 т.)**

която се реализира при

$$z_\mathrm{min} = a_0 = \left(\frac{\hbar^2}{m^2g}\right)^{1/3} \approx 7,4\ \mu\mathrm{m}.$$ **(0,5 т.)**

Тогава енергията му по z е

$$E'_\mathrm{min} = \frac{3}{2}m_\mathrm{n}g\left(\frac{\hbar^2}{m_\mathrm{n}^2g}\right)^{1/3} \approx 1,1\ \mathrm{peV}.$$ **(0,5 т.)**

Задача 3. Поглъщане в звездните атмосфери

а) Дължината на вълната на фотон, погълнат от водородния атом при преход от състояние m към състояние n ($n > m$), се дава с формулата на Ридберг:

(1) $$\frac{1}{\lambda} = R_\mathrm{H}\left(\frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2}\right).$$ **[0,5 т]**

Видима светлина се поглъща/излъчва само в серията на Балмер, за която m = 2. **[0,5 т]**

Чрез заместване на различни стойности на n във формулата на Ридберг установяваме, че видима светлина, т.е. в интервала 400 nm – 700 nm, се поглъща само за четири линии:

n	λ	точки
3	$36/(5R_\mathrm{H}) = 656$ nm	**[0,5 т]**
4	$16/(3R_\mathrm{H}) = 486$ nm	**[0,5 т]**
5	$100/(21R_\mathrm{H}) = 434$ nm	**[0,5 т]**
6	$9/(2R_\mathrm{H}) = 410$ nm	**[0,5 т]**

б) Йонизирането на атома съответства на преход на електрона от най-ниската орбита с m = 1 към орбита с $n \to \infty$. Дължината на вълната на фотон, който йонизира атома, е:

(2) $$\lambda_{ion} = \frac{1}{R_\mathrm{H}} \approx 91,2\ \mathrm{nm},$$ **[0,5 т]**

т.е. съответства на ултравиолетово лъчение. Съответната енергия на фотона, т.е. енергията на йонизация на атома, е:

(3) $$E_{\text{ion}} = h\nu_{\text{ion}} = \frac{hc}{\lambda_{\text{ion}}} = hcR_{\text{H}} \approx 2{,}182.10^{-18}\text{J } (13{,}63 \text{ eV})$$ **[0,5 т]**

в) Всеки от електроните има нормално ускорение:

(4) $$a = \frac{v^2}{r}.$$ **[0,5 т]**

Центростремителната сила върху даден електрон е равнодействаща на силата:

(5) $$F_{\text{п}} = \frac{k_{\text{C}}e^2}{r^2}$$ **[0,5 т]**

на привличане към протона в ядрото и силата:

(6) $$F_{\text{о}} = \frac{k_{\text{C}}e^2}{(2r)^2} = \frac{k_{\text{C}}e^2}{4r^2}$$ **[0,5 т]**

на отблъскване от другия електрон. От II принцип на механиката получаваме:

(7) $$\frac{m_{\text{e}}v^2}{r} = F_{\text{п}} - F_{\text{о}} = \frac{3k_{\text{C}}e^2}{4r^2},$$ **[0,5 т]**

откъдето намираме търсената връзка:

(8) $$v = \sqrt{\frac{3k_{\text{C}}e^2}{4m_{\text{e}}r}}.$$ **[0,5 т]**

г) Дължината на вълната на дьо Бройл на даден електрон е:

(9) $$\lambda = \frac{h}{m_{\text{e}}v}.$$ **[0,5 т]**

За стационарните (разрешените) орбити е в сила:

(10) $$2\pi r = n\lambda,$$ **[1,0 т]**

откъдето изразяваме:

(11) $$v = \frac{n\hbar}{m_{\text{e}}r}.$$

Заместваме получения израз за скоростта в уравнение (4) и получаваме:

(12) $$\frac{n\hbar}{m_{\text{e}}r} = \sqrt{\frac{3k_{\text{C}}e^2}{4m_{\text{e}}r}}.$$

След като повдигнем двете страни на квадрат, намираме израз за радиусите на стационарните орбити:

(13) $$r_n = \frac{4n^2\hbar^2}{3m_e k_C e^2}.$$ **[1,0 т]**

д) Радиусът на най-ниската орбита се получава при $n = 1$:

(14) $$r_1 = \frac{4\hbar^2}{3m_e k_C e^2}.$$

Скороста на електрона върху първата орбита намираме от уравнение (11):

(15) $$v_1 = \frac{3k_C e^2}{4\hbar}.$$

и получаваме израз за общата кинетична енергия на на двата електрона:

(16) $$E_{к1} = 2 \times \frac{m_e v_1^2}{2} = \frac{9m_e k_C^2 e^4}{16\hbar^2}.$$ **[1,0 т]**

Общата потенциална енергия на системата включва енергия на взаимодействие на двата електрона с ядрото:

(17) $$W_{е-я} = \frac{2k_C(3e)(-e)}{r_1} = -\frac{6m_e k_C^2 e^4}{4\hbar^2}$$ **[0,5 т]**

и енергия на взаимодействие между самите електрони:

(18) $$W_{е-е} = \frac{k(-e)(-e)}{2r_1} = \frac{3m_e k_C^2 e^4}{8\hbar^2},$$ **[0,5 т]**

така че пълната енергия на атома е:

(19) $$E_1 = E_к + W_{е-я} + W_{е-е} = -\frac{9m_e k_C^2 e^4}{16\hbar^2}.$$ **[1,0 т]**

Числената стойност е съответно:

(20) $$E_1 = -2{,}455.10^{-18}\text{J} = -15{,}34 \text{ eV}.$$ **[1,0 т]**

е) Нулева енергия за водородния йон съответства на състояние, в което двата електрона се намират на безкрайно голямо разстояние от ядрото. Ако водородният йон се намира в основното си състояние, състояние с нулева енергия може да се получи чрез две последователни стъпки: 1) поглъщане на фотон с енергия $h\nu_{\text{dis}}$, който дисоциира йона до неутрален атом и свободен електрон и 2) йонизиране на неутралния водороден атом. Следователно:

(21) $$E_1 + h\nu_{\text{dis}} + h\nu_{\text{ion}} = 0,$$ **[1,0 т]**

откъдето намираме търсената енергия на дисоциация:

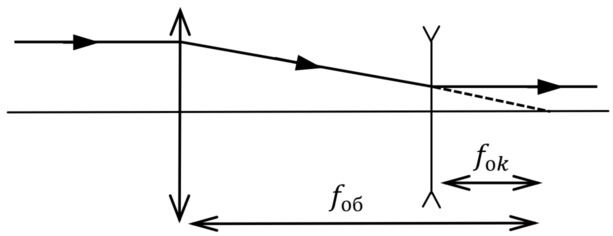
(22) $$E_{\text{dis}} = h\nu_{\text{dis}} = (-E_1) - h\nu_{\text{ion}} = 2{,}73.10^{-19}\text{J} = 1{,}70 \text{ eV}.$$ **[0,5 т]**

Съответната дължина на вълната на фотона е:

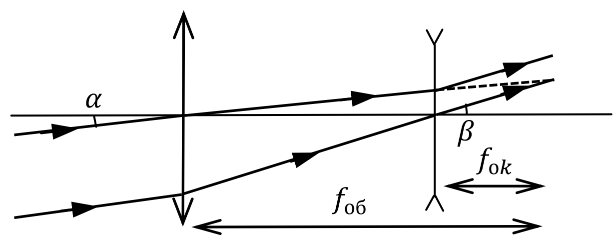
(22) $$\lambda_{\text{dis}} = \frac{c}{\nu_{\text{dis}}} = \frac{hc}{E_{\text{dis}}} \approx 729\ \text{nm},$$ **[0,5 т]**

т.е. това е фотон от инфрачервената част на спектъра. Всички фотони с по-малка дължина на вълната, т.е. във видимия диапазон, ще се поглъщат от водородните йони, като ги дисоциират.

Задача 4. Галилеев телескоп и съвременен бинокъл



а) Тъй като падащ успореден сноп (източник на безкрайност) след преминаване през обектива и окуляра трябва да остане успореден (образ на безкрайност), то това означава (вижда се от чертежа **[0.5 т.]**), че задните фокуси на двете лещи съвпадат. Тогава разстоянието d между двете лещи е $d = f_{об} - f_{ок}$. **[0.5 т.]** (1)



б) От чертежа **[1 т.]** се вижда, че $\Gamma = \frac{\beta}{\alpha} = \frac{f_{об}}{f_{ок}}$. **[0.5 т.]** (2) Оптичната сила Φ на телескопа е нула. **[1 т.]**

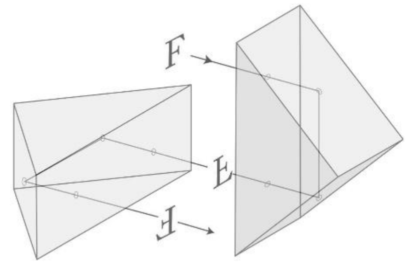
в) От (2) и (1) се получава $f_{ок} = \frac{d}{\Gamma-1}$, **[0.5 т.]** и $f_{об} = \frac{\Gamma.d}{\Gamma-1}$. **[0.5 т.]**

г) Замествайки с дадените стойности за d и Γ в получените в подусловие в) формули, $f_{об} \approx 980$ mm, **[0.5 т.]** и $f_{ок} \approx 48.0$ mm. **[0.5 т.]**

д) От чертежа към подусловие а) се вижда че диаметрите на входния и изходния сноп се отнасят както отношението на фокусните разстояния на обектива и окуляра, $\frac{D}{l} = \frac{f_{об}}{f_{ок}}$, откъдето $D = l\frac{f_{об}}{f_{ок}}$ **[0.5 т.]** = 102 mm. **[0.5 т.]**

е) При предположение 1) от формулата на лещата $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_{об}}$ (3) и $x = s' - f_{об}$ (4). Замествайки (3) в (4), $x = \frac{f_{об}{}^2}{s-f_{об}}$ **[0.5 т.]** ≈ 19.6 mm. (окулярът ще се отдалечи от обектива) **[0.5 т.]** При предположение 2) от формулата на лещата, приложена за обектива и окуляра $\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f_{об}}$ (3) и $\frac{1}{-(s'-d-x)} + \frac{1}{-(s+d+x)} = \frac{1}{-f_{ok}}$. (5) **[0.5 т.]** Изчислявайки s' от (3), $s' \approx 1{,}00$ m. **[0.5 т.]** Замествайки s', d и f_{ok} с дадените стойности в (5) се стига до уравнението $x^2 + 50864x - 1015376 = 0$, **[1 т.]** където x е в mm. Положителният му корен е $x \approx 20.0$ mm. **[0.5 т.]** Вижда се, че и при двете предположения се получава практически един и същ резултат.

ж) Изследвайки отраженията в призмите на Поро, изгледът на буквата F е даден на фигурата вдясно. **[1 т.]**



з) За да няма резултантно отражение от лещите, отраженията от границата въздух-тънък слой и от границата тънък слой-стъкло трябва да се гасят, т.е. трябва да са с равна интензивност и да са в противофаза. Ако пада лъч с интензивност I_0, отразеният лъч от първата повърхност въздух-тънък слой ще има интензивност $I_1 = I_0\left(\frac{n'-1}{n'+1}\right)^2$. **[0.5 т.]** Интензивността на отразеният лъч от втората повърхност тънък слой-стъкло и излязъл от тънкия слой ще има интензивност $I_2 = I_0\left[1-\left(\frac{n'-1}{n'+1}\right)^2\right]^2 . \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2$. **[0.5 т.]** Тъй като $I_1 = I_2$, $\left(\frac{n'-1}{n'+1}\right)^2 \approx \left(\frac{n-n'}{n+n'}\right)^2$. **[0.5 т.]** След опростяване $n' = \sqrt{n}$. **[0.5 т.]** За да са в противофаза разликата в оптичните пътища $2n'h = (k+1/2)\lambda$, т.е. $h_k = \frac{(k+1/2)\lambda}{2n'}$ **[0.5 т.]** (6) След заместване $n' \approx$ 1.22 **[0.2 т.]** и $h' = h_1 \approx 118$ nm. **[0.3 т.]**

и) Тъй като условието (6) не може да бъде изпълнено за всички дължини на вълните едновременно, **[0.4 т.]** логично е слоят да е с дебелина, която осигурява гасене на отражението в средата на видимия диапазон, т.е. в жълто-зелената област. **[0.4 т.]** В двата края на видимия диапазон (6) няма да е изпълнено и там отражения ще има, което обяснява наблюдавания червено-виолетов нюанс на повърхностите на лещите. **[0.2 т.]**