

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**  
**XXVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

**Областен кръг на олимпиадата по астрономия**  
**25 февруари 2024 г.**  
**Възрастова група VII-VIII клас – решения**

**1 Задача. Черни дупки.** За да се превърне едно тяло с маса  $M$  в черна дупка, цялата му маса трябва да бъде събрана в сфера с радиус, който се нарича радиус на Шварцшилд. Той се пресмята по формулата:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

където  $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$  е гравитационната константа, а  $c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  е скоростта на светлината.

- **А)** Пресметнете радиуса на Шварцшилд за човек с маса 80 kg. Намерете отношението на този радиус към радиуса на електрона, който е  $1.4 \times 10^{-15} \text{ m}$ .
- **Б)** Пресметнете радиуса на Шварцшилд за планетата Земя. Сравнете го по размер с някакъв познат и привичен за вас предмет или обект.
- **В)** Пресметнете радиуса на Шварцшилд за нашата галактика Млечен път, чиято маса е  $10^{12}$  пъти по-голяма от масата на Слънцето. Изразете този радиус в километри, в астрономически единици и в светлинни години.
- **Г)** Намерете масата (в единици слънчеви маси) на черната дупка, която се намира в центъра на нашата галактика Млечен път. Нейният радиус е 12 милиона километра.

**Справочни данни:**

Маса на Земята –  $6 \times 10^{24} \text{ kg}$

Маса на Слънцето –  $2 \times 10^{30} \text{ kg}$

Астрономическа единица –  $149.6 \times 10^6 \text{ km}$

Светлинна година –  $9.46 \times 10^{12} \text{ km}$ .

**Решение:**

А) Нека да означим масата на човека с  $m$ . Съгласно дадената ни в условието формула, радиусът на Шварцшилд, който съответства на тази маса е:

$$R_S = \frac{2Gm}{c^2} \approx 1,2 \cdot 10^{-25} \text{ m}$$

Този радиус е около  $10^{10}$  пъти по-малък от дадения ни размер на електрона. Явно не е лесно да направим черна дупка от човек 😊.

Б) Аналогично, ако  $M_3$  е масата на Земята, то нейния радиус на Шварцшилд е:

$$R_S = \frac{2GM_3}{c^2} \approx 9 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Виждаме, че за да превърнем Земята в черна дупка трябва да я свием до радиус 9 mm. Това е сравнимо с някои малки предмети, с които се срещаме в нашия всекидневен живот, например: топче за игра (топче от мишка 😊), орех, капачка от бутилка и т.н.

В) Нека с  $M_{MW}$  да означима масата на Млечния път. Първо пресмятаме масата на нашата Галактика в килограми:

$$M_{MW} = 10^{12} \cdot M_{Сл} = 2 \cdot 10^{42} \text{ kg}.$$

От тук, изрязваме, че радиусът, до който трябва да свием Млечния път, за да се превърне той в черна дупка е:

$$R_S = \frac{2GM_{MW}}{c^2} \approx 3 \cdot 10^{15} \text{ m} = 3 \cdot 10^{12} \text{ km}$$

Използвайки, получената стойност, намираме, че:

$$R_S[\text{au}] = \frac{3 \cdot 10^{12} \text{ km}}{149,6 \cdot 10^6 \text{ km}} \approx 2 \cdot 10^4$$

Също така:

$$R_S[\text{ly}] = \frac{3 \cdot 10^{12} \text{ km}}{9,46 \cdot 10^{12} \text{ km}} \approx 0,31$$

Г) Нека с  $R$  да означим радиуса на черната дупка в центъра на Млечния път. Ако търсената маса е  $M$ , то:

$$R = \frac{2GM}{c^2}$$

От тук получаваме:

$$M = \frac{Rc^2}{2G} \approx 8,1 \cdot 10^{36} \text{ kg}$$

Превръщайки тази маса в маси на Слънцето, се получава:

$$M \approx 4,05 \cdot 10^6 M_{\text{Сл}}$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

А) – 2т

- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд и вярно получена числена стойност – 1т.
- За вярно сравнение на този радиус с размера на електрона – 1т.

Б) – 2т

- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд на Земята и вярно получена числена стойност – 1т
- За сравнение с някакъв обект от всекидневието – 1т.

В) – 5т

- За превръщане на масата на Млечния път в килограми – 1т.
- За правилен израз за радиуса на Шварцшилд и вярно получена стойност в метри и километри – 2т.
- За превръщане на получения радиус в астрономически единици – 1т.
- За превръщане на получения радиус в светлинни години – 1т.

Г) – 3т.

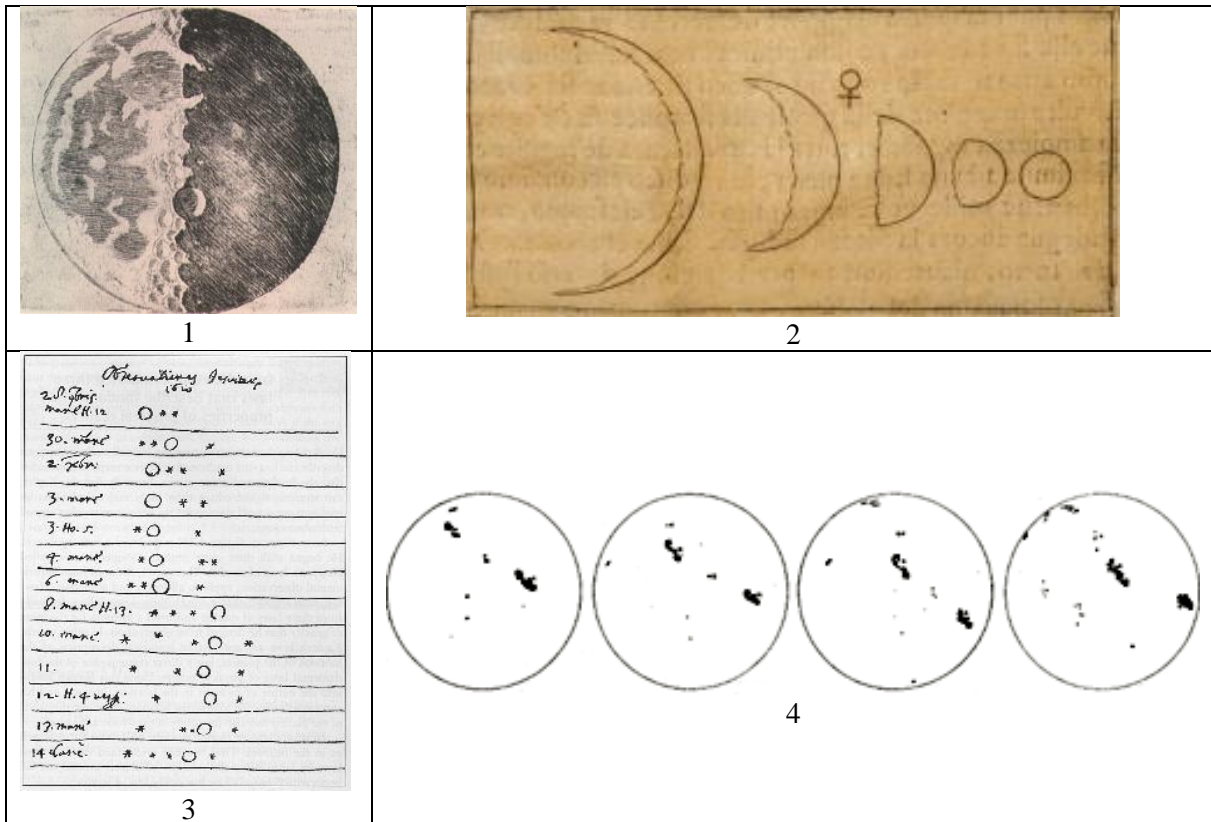
- За правилен израз за масата на черната дупка и вярно получена стойност – 2т.
- За правилно превръщане в слънчеви маса – 1т.

**2 задача. Галилео Галилей.** Знаменитият италиански учен Галилео Галилей е живял в XVII век, когато сред научната общност е господствала идеята за геоцентричния модел на света. Галилео Галилей е конструирал първия телескоп и е направил наблюдения, които са послужили в пряка подкрепа на хелиоцентричната система със следните аргументи:

- А) Освен Земята, има и друг обект в Слънчевата система, който се върти около оста си;
- Б) Земята не е единственото тяло, около което могат да обикалят други космически тела;
- В) Най-близкият до нас космически обект не е кристална сфера, а тяло със скалиста повърхност;

- Г) Най-ярката видима в небето планета се осветява от Слънцето и показва различни фази.

Разгледайте дадените ви рисунки, направени от самия Галилео Галилей. За всяка от рисунките отговорете какъв космически обект е изобразен и кой от посочените аргументи се потвърждава от нея. Дайте кратко обяснение, не по-дълго от 3-4 изречения за всяка картинка.



### Решение:

На рисунка 1 е изобразена Луната. По времето на Галилео Галилей все още е господствала идеята от времето на древните гърци, според която небесните тела се състоят от ефирна материя – различна от всякакви видове вещества, които се срещат на Земята. За Луната, като най-близо до нас тяло, най-много се е допускало, че е кристална сфера. Наблюденията на Галилей показват, че тя е със скална повърхност и е тяло подобно на Земята (аргумент В).

На рисунка 2 са представени различните фази, които планетата Венера показва, когато се намира в различни положения спрямо Земята и Слънцето. Също така са отразени различните видими ъглови размери на Венера при различните разстояния, на които планетата може да се намира от Земята в тези различни положения. Това показва, че Венера свети с отразена от Слънцето светлина и се движи около него (аргумент Г).

На рисунка 3 са дадени зарисовки на Юпитер и неговите четири най-големи спътници, наблюдавани от Галилео Галилей на различни дати. Те показват, че Юпитер е още един обект, различен от Земята, около който могат да обикалят други космически тела (аргумент Б).

На рисунка 4 са представени зарисовки на Слънцето със слънчеви петна. Рисунките явно са подредени в хронологичен ред и изместването на петната показва, че Слънцето е още един космически обект, който се върти около оста си (аргумент А).

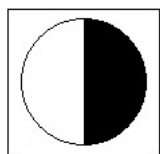
Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилни названия на обектите –  $4 \times 1 \text{ т.} = 4 \text{ т.}$

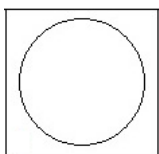
За правилно посочване кои аргументи се подкрепят от тези наблюдения и кратко обяснение –  $4 \times 2 \text{ т.} = 8 \text{ т.}$

**3 Задача. Рисунки на Луната.** В началото на 2019 г. известният български астроном Александър Куртенков планира поредните си наблюдения с 2-метровия телескоп в Националната астрономическа обсерватория (НАО) Рожен. Стреми се да се съобрази с лунните фази и да направи своите заявки за наблюдателно време в периодите, когато няма да му пречи ярката лунна светлина.

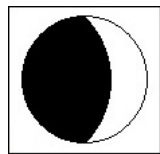
На 21 януари 2019 г. от България е могло да се види началото на пълно лунно затъмнение и Александър организира наблюдение за своите ученици, които подготвя за астрономическата олимпиада. След това им възлага за упражнение да му помогнат в планирането на неговото наблюдателно време в НАО Рожен, като пресметнат какви ще са фазите на Луната на определени дати. Пред вас са рисунките, направени от учениците за определените от тях лунни фази.



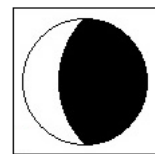
26 февруари



12 май



4 септември



13 ноември

• А) Правилно ли са определили учениците фазите на Луната за всяка от тези дати през 2019 г.?

• Б) Ако според Вас някои от рисунките не съответстват на истинската фаза на Луната, в която тя е била на съответната дата от 2019 година, то нарисуйте Ви как тя би трябвало да е изглеждала тогава.

Обяснете Вашите отговори.

Синодичният лунен месец (периодът на смяна на фазите на Луната) е равен на 29.5 денонощия.

**Решение:**

А) На 21 януари 2019г. се е наблюдавало лунно затъмнение. Следователно, тогава Луната е била във фаза пълнолуние.

Използвайки информацията, че синодичният лунен месец е 29,5 дни, можем да намерим датите (поне с точно едно денонощие) на които са били следващите пълнолуния през 2019г. Получаваме: 19 февруари, 20 март, 19 април, 18 май, 17 юни, 16 юли, 15 август, 14 септември, 13 октомври, 12 ноември.

Понеже, на 19 февруари Луната е била в пълнолуние, то нейната фаза на 26 февруари (седем дни по-късно) би следвало да бъде много близка до последна четвърт. Изобразената на първата рисунка Луна е именно в такава фаза, т.е. за тази дата учениците са я нарисували правилно.

На втората рисунка, която би трябвало да съответства на 12 май, се вижда пълна Луната. Според нашите пресмятания, пълнолунието през месец май е било на 18-то число от месеца. Това означава, че тази рисунка е неправилна.

Септемврийското пълнолуние е било на 14-ия ден от месеца. Следователно, на 4 септември са оставали 10 дни до пълнолунието. Тогава Луната би трябвало да е била във фаза, между новолуние и първа четвърт. Тя би трябвало да е изглеждала като огрян

отдясно и не много тънък сърп. Именно това са нарисували и учениците на Александър Куртенов, т.е. и в случая фазата на Луната е правилна.

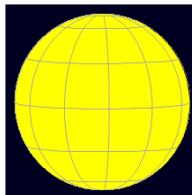
Пресметнахме, че на 12 ноември Луната би трябвало да е била пълна. Следователно на следващата дата (13 ноември) нейната фаза следва да е била много един ден след пълнолуние. Това, което учениците са нарисували е много различно, което означава, че и тази рисунка е неправилна.

*При решаването на тази задача е възможно ученикът да е използвал съвсем различен начин, за проверка на това дали нарисуваните лунни фази съответстват на истинските. Ако методът е правилен и са направени верни изводи следва да се присъдят пълен брой точки.*

Б) На 12 май 2019г. (датата на първата неправилно нарисувана картинка), са оставали шест дни до следващото пълнолуние. Следователно, фазата на Луната е била приблизително един ден след първа четвърт. От тук следва, че за наблюдател в НАО Рожен (в северното полукълбо), Луната е изглеждала така:



Вече получихме, че на 12 ноември фазата на Луната е била пълнолуние. Това означава, че на следващия ден Луната е била почти пълна, като съвсем малка част в дясната част на нейния диск е била тъмна. Изглеждала е приблизително така:



Критерии за оценяване (общо 12 т.):

- А) – За правилен метод, по който се проверява дали фазата на Луната на всяка картинка е такава, каквато е нарисувана и верен извод – 2т за всяка картинка*
- Б) – За правилно обяснение и вярно изобразена фаза на Луната за всяка от сгрешените дати (12 май и 13 ноември) – 2т.*

**4 задача. Слънчево петно.** Пред вас е снимка на Слънцето от 10 февруари 2024г. Около средата на видимия слънчев диск има голямо продълговато слънчево петно.

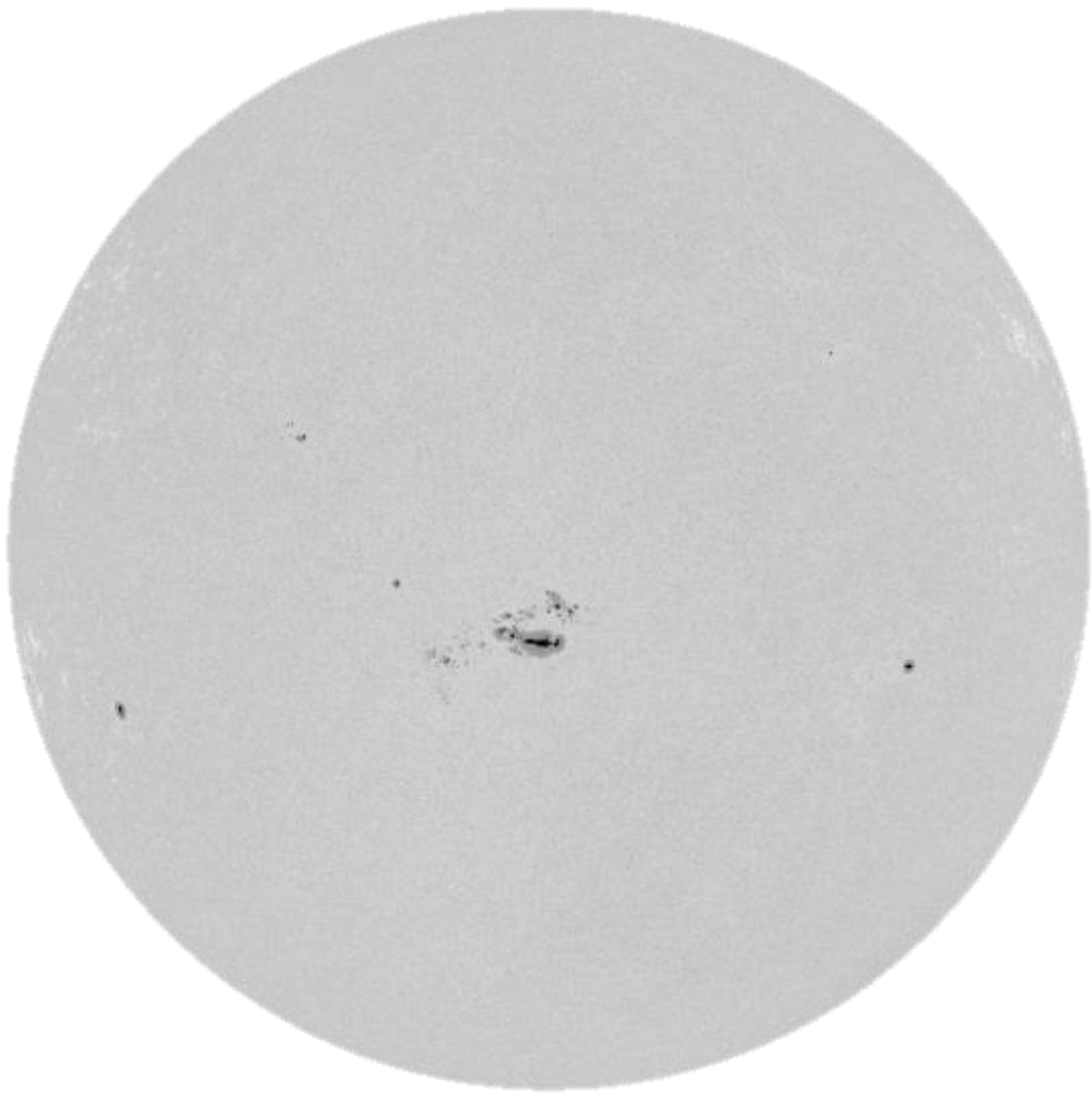
- **А)** Определете дължината на петното в километри. Диаметърът на Слънцето е 1 392 000 км. На Фиг. 2 е показана отсечката, която приемаме, че съответства на дължината на петното. Използвайте Фиг. 2 само за справка, а всички измервания по това подусловие направете върху Фиг. 1.

- **Б)** Колко пъти петното е по-голямо от диаметъра на Земята? Пресметнете мащаба на Фиг. 2. Начертайте земното кълбо до изображението на слънчевото петно на тази фигура.

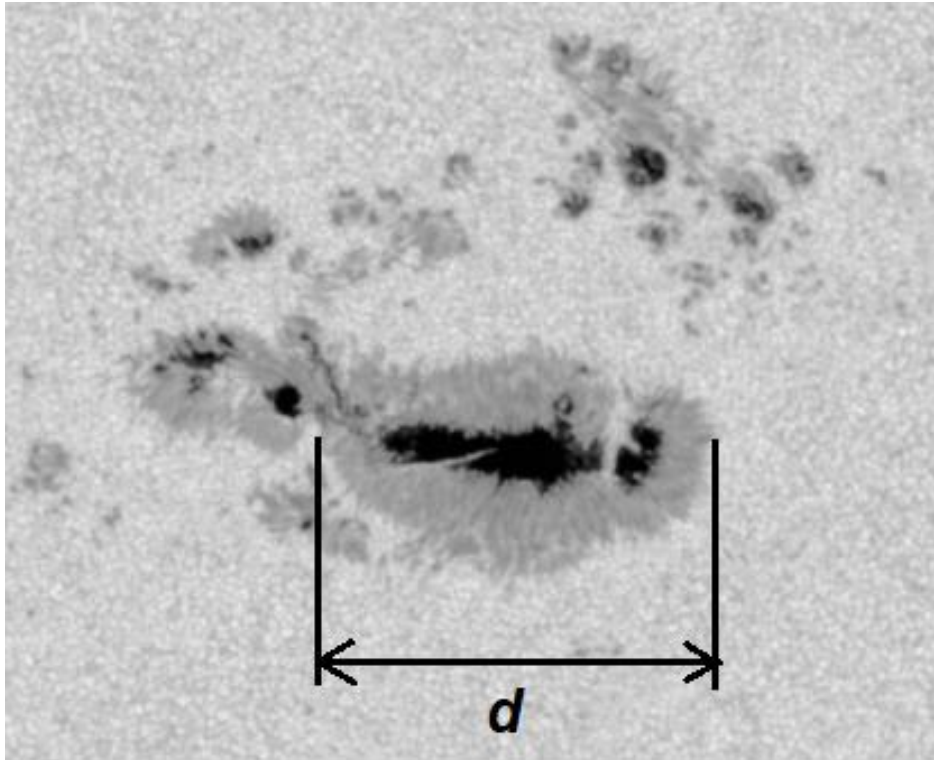
- **В)** Намерете приблизително разстоянието по слънчевата повърхност от петното до най-близката точка, която в момента виждаме на ръба на слънчевия диск?

Справочни данни:

Диаметър на Земята – 12 756 km.



Фиг. 1. Слънцето на 10 февруари 2024 г.



Фиг. 2. Увеличено изображение на петното.

**Решение:**

Измерваме диаметъра на Слънцето и дължината на петното на Фиг. 1 и получаваме съответно  $D_1 = 143 \text{ mm}$  и  $d_1 = 6.5 \text{ mm}$ . Дадено ни е, че диаметърът на Слънцето е  $D = 1392000 \text{ km}$ . Оттук можем да намерим мащаба на изображението на Фиг. 1:

$$\frac{D}{D_1} = \frac{1392000 \text{ km}}{143 \text{ mm}} \approx 9734 \text{ km/mm}$$

С помощта на този мащаб получаваме дължината на слънчевото петно:

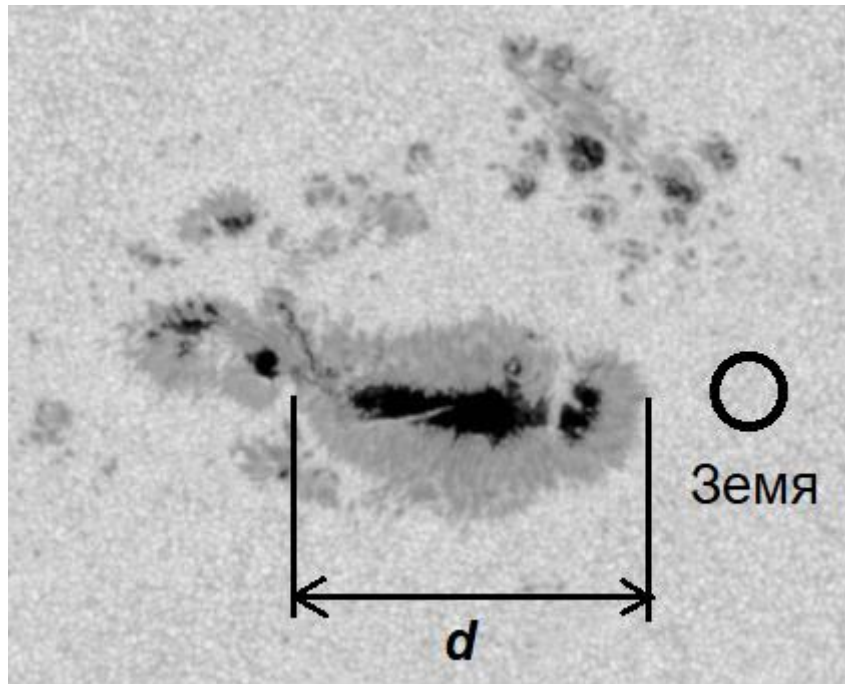
$$d = \frac{D}{D_1} \cdot d_1 = 9734 \times 6.5 \text{ mm} \approx 63300 \text{ km}$$

Диаметърът на Земята е  $D_0 = 12756 \text{ km}$ . Сравняваме го с дължината на слънчевото петно:

$$\frac{d}{D_0} = \frac{63300}{12756} \approx 5$$

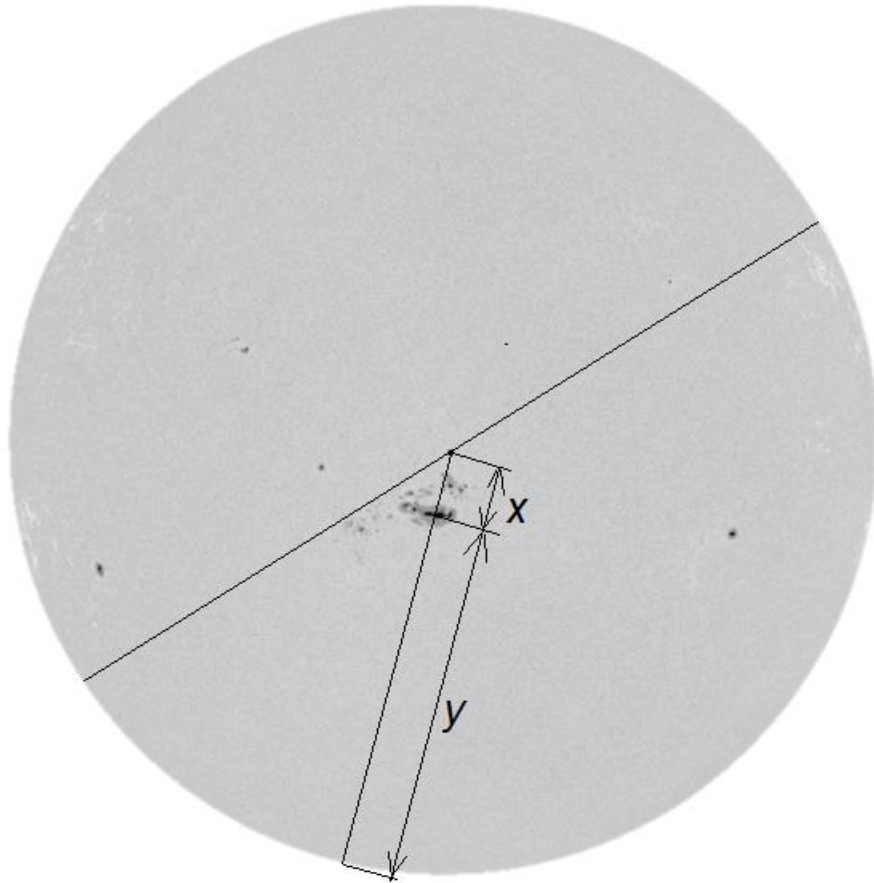
Дължината на това слънчево петно е приблизително пет пъти по-голяма от диаметъра на Земята.

Измерваме дължината на петното на Фиг. 2 и получаваме  $d_2 = 52.5 \text{ mm}$ . Щом като земното кълбо е 5 пъти по-малко от това петно, то на Фиг. 2 трябва да изобразим Земята като кръгче с диаметър  $52.5 / 5 = 10.5 \text{ mm}$ .



Начертаваме един диаметър на Слънцето на Фиг. 1, измерваме къде е средата на този диаметър и така определяме приблизително местоположението на центъра на видимия слънчев диск. Отбелязваме го с точка. Измерваме разстоянието от тази точка ориентировъчно до средата на слънчевото петно и получаваме  $x = 13 \text{ mm}$ . Тъй като отсечката  $x$  в централната част на видимия слънчев диск и е малка в сравнение с диаметъра на Слънцето, то можем да считаме, че тя е приблизително равна на дъгата от слънчевата повърхност, свързваща центъра на видимия слънчев диск и средата на петното.





Като използваме отново мащаба на Фиг. 1, намираме на какво разстояние в километри отговаря тази отсечка:

$$X = x \times 9734 = 126542 \text{ km}$$

Цялата обиколка на Слънцето е :

$$L = \pi D \approx 4373000 \text{ km}$$

Разстоянието по слънчевата повърхност от центъра на видимия слънчев диск до периферна точка на изображението на Слънцето ще се равнява на  $\frac{1}{4}$  от обиколката на Слънцето. Следователно разстоянието по слънчевата повърхност от петното до най-близката точка, която в момента виждаме на ръба на слънчевия диск, ще бъде:

$$y = \frac{L}{4} - X \approx 966\,708 \text{ km}$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За измервания и пресмятания по Фиг. 1 и определяне на дължината на петното в километри – 3 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

За определяне колко пъти дължината на петното е по-голяма от диаметъра на Земята – 1 т.

За измервания и пресмятания по Фиг. 2 – 2 т.

За начертаване на земното кълбо в съответния мащаб на Фиг. 2 – 1 т.

За правилна теоретична постановка на начина за определяне на разстоянието от петното до периферна точка от слънчевия диск – 1.5 т.

За измервания и пресмятания – 1.5 т.

За правилен числен резултат – 1 т.

*Пояснение: Поради различното качество и мащаби на отпечатване на фигурите в размножените условия на задачите, участниците в олимпиадата може да са получили леко различаващи се резултати от измерванията и пресмятанията. Затова следва да се оценява правилният метод на работа и верността на изчисленията по измерените от учениците величини.*

**5 задача. Пепеляшка.** Благодарение на добрата вълшебница Пепеляшка получава прекрасна рокля и каляска и отива на бала в царския дворец. Вълшебницата я предупреждава, че магията ще трае само до местната полунощ – не по поясно време, а до средата на нощта за географското място, където тя се намира в даден момент. Дворецът е разположен на централния меридиан на своя часови пояс, на географска ширина  $60^{\circ}\text{N}$ . Домът на Пепеляшка е на 50 километра западно от двореца. Увлечена в танците с красивия принц, Пепеляшка си спомня за предупреждението, когато часовникът в балната зала показва 23:55 ч. (поясно време). За 30 секунди тя изтичва навън до каляската, като изгубва едната си кристална пантофка.

• **А)** С каква скорост трябва да се движи точно на запад вълшебната каляска, така че да закара Пепеляшка до нейния дом, преди да се превърне отново в тиква?

• **Б)** След като принцесата пристига в дома си в полунощ, тя поглежда ясното нощно небе. Може ли да види следните съзвездия, ако датата е 25 декември (отбележете ДА/НЕ за всяко): Орион, Кентавър, Голяма мечка, Колар, Орел.

**Справочни данни:**

Радиусът на Земята е 6371 км.

Паралелът на географска ширина  $60^{\circ}$  е с два пъти по-малка дължина от дължината на земния екватор.

**Решение:**

След като е видяла часовника в двореца да показва 23:55 ч., Пепеляшка е изтичала до каляската за 30 секунди, което означава, че е тръгнала за дома си в 23:55:30 ч. До полунощ по този часовник остава интервал от време  $\Delta t_1 = 4 \text{ min} 30 \text{ sec}$ . Дворецът се намира на  $60$ -градусовия паралел, който е с двойно по-малка дължина от земния екватор. Ако означим земния радиус с  $R$ , то дължината на този паралел е:

$$l = \frac{2\pi R}{2} = \pi R$$

Домът на пепеляшка се намира на разстояние  $a = 50 \text{ km}$  от двореца в посока запад, което означава, че той е на същия паралел, на който е дворецът. Разликата между географските дължини на двореца и на дома на Пепеляшка ще бъде:

$$\Delta\lambda = \frac{a}{l} \cdot 360^{\circ} = \frac{a}{\pi R} \cdot 360^{\circ}$$
$$\Delta\lambda \approx 0.899^{\circ}$$

Можем да приемем, че дворцовият часовник е настроен по пояското време на часовия пояс, в който е разположен дворецът. В условието е казано, че дворецът се намира на централния меридиан на часовия пояс и това означава, че местното слънчево време за двореца съвпада с пояското време. Домът на Пепеляшка е на запад от двореца и следователно там полунощ ще настъпи по-късно. Можем да намерим колко време по-късно ще стане това:

$$\Delta t_2 = \frac{\Delta\lambda}{360^{\circ}} \cdot 24\text{h} \cdot 60 \text{ min} \approx 3.596 \text{ min}$$

Оттук следва, че времето, с което Пепеляшка разполага, за да се върне с каляката в къщи, преди тя да се превърне отново в тиква, е:

$$\Delta t = \Delta t_1 + \Delta t_2 = 8.096 \text{ min}$$

Сега вече можем да намерим минималната скорост, с която трябва да се движи каляската:

$$v = \frac{a}{\Delta t} \approx 370.6 \text{ km/h}$$

След като пристигне до дома си по средата на нощта и датата 25 декември, Пепеляшка би могла да види Голямата мечка, понеже тя е незалязващо съзвездие за  $60^\circ$  северна ширина, а също Орион и Колар, тъй като тези съзвездия се виждат през зимните нощи и са изгряващи и залязващи за съответната географска ширина. Не би могла да види съзвездието Орел, защото то се вижда на лятното и есенното небе, а към полунощ през декември вече ще е залязло. Съзвездието Кентавър (Центавър) не е възможно да се вижда, защото на тази географска ширина то е неизгряващо съзвездие от южното небе.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

*За пресмятане на времето, което остава от слизането на Пепеляшка при каляската до полунощ по дворецовия часовник – 1 т.*

*За правилен метод за пресмятане на интервала от време, с който разполага Пепеляшка, за да стигне до дома си преди там да е настъпила полунощ – 4 т.*

*За правилен числен отговор – 1 т.*

*За намиране на скоростта на каляката – 1 т.*

*За верни отговори дали ще се виждат петте дадени съзвездия и обяснение  $5 \times 1 \text{ т.} = 5 \text{ т.}$*