

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Областен кръг на олимпиадата по астрономия
25 февруари 2024 г.
Възрастова група XI-XII клас

1 Задача. От нищо – нещо. Нека да приемем, че една планета се движи по кръгова орбита около звезда. Видимият ъглов диаметър на звездата, за наблюдател от планетата е $\delta = 21'$ (дъгови минути).

• **А)** Ако знаете, че орбиталният период на планетата е $T = 690$ денонощия, то намерете средната плътност на звездата.

• **Б)** Орбиталната скорост на планетата е $V = 18,4$ km/s. Намерете каква ще бъде големината на скоростта, с която тази планета ще достигне повърхността на звездата, ако тя изведнъж загуби цялата си скорост и започне да пада по права линия към звездата.

• **В)** Радиусът на планетата е 80 пъти по-малък от този на звездата. Ако знаете, че наклонът на еклиптиката на планетата, спрямо нейния екватор е $\varepsilon = 13^\circ.5$, то пресметнете колко време (изразено като част от орбиталния период на планетата) след момента, в който дискът на звездата започва да залязва за наблюдател на южния полюс, той започва да изгрява за наблюдател на северния полюс. Планетата няма атмосфера.

Забележка: Величините, които са дадени в текста на някое подусловие, НЕ МОГАТ да бъдат използвани за решаването други подусловия.

Справочни данни:

Гравитационна константа – $6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$

Решение:

А) Нека с M да означим масата на звездата, около която планетата се движи, с R – радиуса на тази звезда, а с r – орбиталния радиус:

Съгласно третия закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Ако търсената средна плътност е ρ , можем да изразим масата по следния начин:

$$M = \rho \frac{4}{3} \pi R^3$$

Замествайки в предното уравнение, получаваме:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{G}{4\pi^2} \rho \frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{G\rho R^3}{3\pi}$$

Използвайки, че:

$$\delta[\text{rad}] = \frac{2R}{r}$$

получаваме:

$$\rho = \frac{24\pi}{G \cdot \delta[\text{rad}]^3 \cdot T^2} \approx 1\,400 \text{ g/cm}^3$$

Б) Нека с M да означим масата на звездата с R нейния радиус, а с r – радиуса на планетната орбита. За дадената ни скорост на планетата можем да запишем:

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Когато планетата изгуби цялата си орбитална скорост, относно звездата, тя няма кинетична енергия. Нейната механична енергия, в този момент, се състои само от гравитационна потенциална енергия. Можем да изразим тази енергия така:

$$E_1 = -\frac{GMm}{r}$$

където m е масата на планетата.

Ако търсената скорост е u , то в момента, в който планетата достига до повърхността на звездата, тя има механична енергия:

$$E_2 = \frac{mu^2}{2} - \frac{GMm}{R}$$

Съгласно закона за запазване на енергията:

$$E_1 = E_2$$

От тук получаваме, че:

$$u = \sqrt{\frac{2GM}{R} - \frac{2GM}{r}} = \sqrt{\frac{2GM}{r} \frac{r}{R} - \frac{2GM}{r}} = v \sqrt{2\left(\frac{r}{R} - 1\right)}$$

Отчитайки, че:

$$\delta[\text{rad}] = \frac{2R}{r}$$

получаваме:

$$u = v \sqrt{2\left(\frac{2}{\delta[\text{rad}]} - 1\right)} \approx 470 \text{ km/s}$$

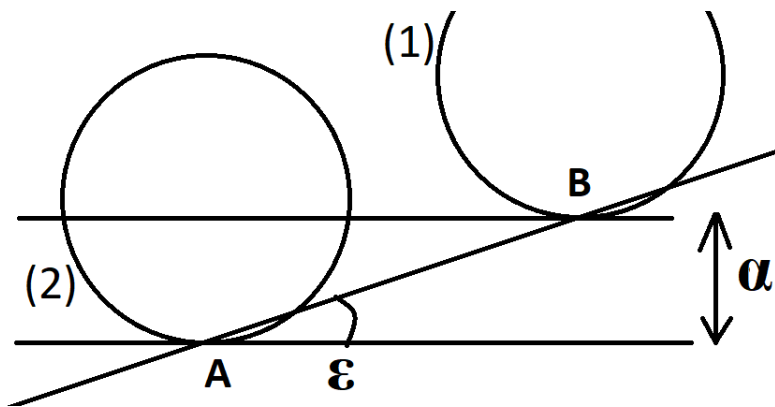
В) Нека с D да означим диаметъра на планетата, с r разстоянието между планетата и звездата и с T – орбиталния период на планетата.

Причината, поради която дискът на звездата не започва да изгрява за северния полюс, в момента, в който започва залезът му за южния е полюс е паралаксът на звездата.

Равнините, в които лежи математическите хоризонти за наблюдателите на северния и южния полюс на планетата отстоят на разстояние D една от друга, защото тези равнини са допирателни към повърхността на планетата в съответните полюси.

Ъгловото отстояние между двата хоризонта е:

$$\alpha = \frac{D}{r} = \frac{\delta}{80} \approx 16''$$



За търсения интервал от време (t), звездата изминава по еклиптиката дъга с ъглова мярка АВ (както е показано на схемата).

За ъгловата мярка на АВ можем да запишем:

$$AB = \frac{\alpha}{\sin(\epsilon)} \approx 67''$$

Следователно:

$$\frac{t}{T} = \frac{AB}{360^\circ} \approx 5,2 \cdot 10^{-5}$$

Критерии за оценяване (общо – 12т):

А) – 4т

- За правилна математическа постановка, чрез която се достига до израз за средната плътност на звездата само, чрез дадените величини – 3т.

- За правилен краен буквен израз и краен числен резултат – 1т.

Б) – 4т.

- За правилна математическа постановка, чрез която се достига до израз за търсената скорост само, чрез дадените величини – 3т.

- За правилен краен буквен израз и краен числен резултат – 1т.

В) – 4т.

- За намиране на денонощния паралакс на планетата – 1т.

- За правилни геометрични съображения, чрез които се намира търсеното време – 2т.

- За правилен краен буквен израз и краен числен резултат – 1т.

2 задача. Пришълец.

През 2017 г. беше открит странен астероид, който възбуди особено силно интереса на астрономите. Дадено му беше хавайското име Оумуамуа. Той премина през перихелия на своята траектория със скорост 87.71 km/s на разстояние 0.25534 au от Слънцето.

• А) Да се докаже, че този астероид е пришълец от междузвездното пространство и не принадлежи на Слънчевата система.



- **Б)** Да се пресметне скоростта, която астероидът придобива, когато се отправя отново между звездите (когато се отдалечи от Слънцето на разстояние, много по-голямо от разстоянието в перихелий).

- **В)** Астероидът долетя до нас от посока, която отстои на 5° от направлението към звездата Вега. Тази звезда се приближава към нас с лъчева скорост -13.9 km/s , има собствено движение $0.35''$ (дъгови секунди) на година и е на разстояние 25 светлинни години. Приведете вашите разсъждения по въпроса възможно ли е или не астероидът да произхожда от близките околности на Вега.

Справочни данни:

$$1 \text{ au} = 149,6 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\text{Маса на Слънцето} - 1,99 \times 10^{30} \text{ kg}$$

$$\text{Гравитационна константа} - 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}$$

Решение:

Първо трябва да намерим параболичната скорост на разстояние от Слънцето r_p , равно на разстоянието от Слънцето до обекта в перихелия на неговата орбита. Означаваме масата на Земята с M , гравитационната константа с G , превръщаме даденото ни разстояние от астрономически единици в метри и получаваме:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2GM}{r_p}} \approx 83.364 \text{ km/s}$$

Скоростта на астероида в перихелия е $v_p = 87.71 \text{ km/s}$ и очевидно надвишава параболичната скорост. Астероидът прелита през перихелия на своята орбита със скорост по-голяма от минималната скорост, която му е необходима, за да преодолее гравитационното притегляне на Слънцето и да напусне завинаги Слънчевата система. Това означава, че той се движи по хиперболична орбита и действително е „пришълец“ от междузвездното пространство, който е прелетял покрай нашето Слънце и отново се е отправил в своето странстване между звездите.

Поради гравитационното въздействие на Слънцето скоростта на астероида ще намалява при отдалечаването му от нашата звезда и по-нататъшното му пътешествие. За да намерим каква ще бъде неговата скорост v , когато се отдалечи на разстояние r , много по-голямо от r_p , можем да използваме закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} = \frac{mv^2}{2} - \frac{GMm}{r}$$

където m е масата на астероида. Тъй като $r \gg r_p$, пренебрегваме последния член в дясната страна на уравнението и получаваме

$$\frac{mv_p^2}{2} - \frac{GMm}{r_p} = \frac{mv^2}{2}$$

$$v = \sqrt{v_p^2 - \frac{2GM}{r_p}} = \sqrt{v_p^2 - v_{II}^2}$$

$$v \approx 27.27 \text{ km/s}$$

Означаваме с $\mu = 0.35''/\text{год}$. собственото движение на Вега, с v_R лъчевата ѝ скорост и с v_τ нейната тангенциална скорост. Първо нека намерим тангенциалната скорост на Вега. Ако $r_v = 25 \text{ ly}$ е разстоянието от Слънцето до Вега, то нейната тангенциална скорост ще бъде:

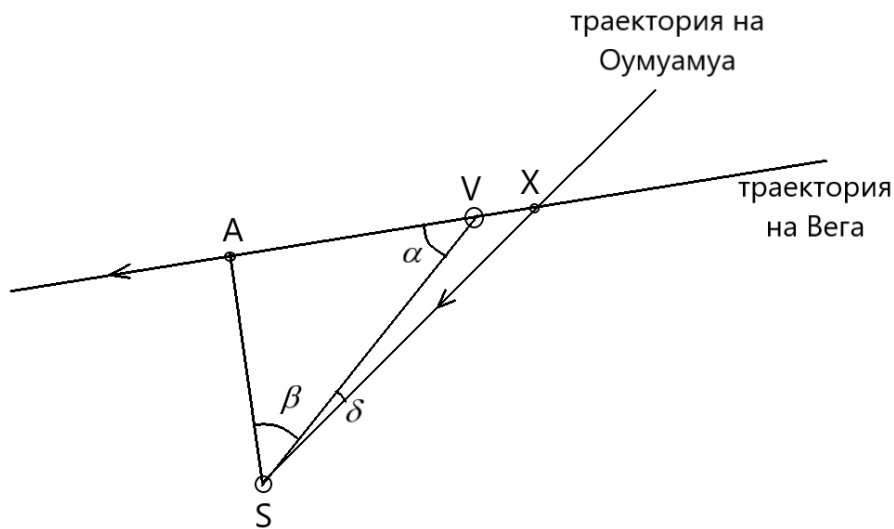
$$v_\tau = \frac{\mu''}{206265} \cdot r_v$$

Тук превръщаме собственото движение от дъгови секунди за година в радиани за година, като го разделяме на 206265 (броя на дъговите секунди в един радиан). Умножаваме го по разстоянието до Вега в светлинни години. Така бихме получили скоростта в единици светлинни години за година. Но тази величина ни показва всъщност какво е отношението на търсената скорост към скоростта на светлината (тя е една светлинна година за година време). За да получим тангенциалната скорост в километри за секунда, просто трябва да умножим получения резултат по скоростта на светлината в същите единици (300 000 km/s). Така намираме:

$$v_t \approx 12.726 \text{ km/s}$$

Пълната пространствена скорост на Вега ще бъде:

$$v_v = \sqrt{v_R^2 + v_t^2} \approx 18.846 \text{ km/s}$$



На схемата с S е означено положението на Слънцето, а с V – положението на Вега в наше време. Разстоянието до нея е $SV = r_v$. Ъгълът α между зрителния лъч от земния наблюдател и пълната скорост на Вега ще бъде:

$$\alpha = \arctan \frac{v_t}{v_R} \approx 42.5^\circ$$

С A на схемата е означена точката от траекторията на Вега, през която тя ще прелети на минимално разстояние от Слънцето. По-нататък намираме:

$$SA = r_v \sin \alpha \approx 16.88 \text{ ly}$$

$$\beta = 90^\circ - \alpha = 47.5^\circ$$

$$AV = r_v \cos \alpha \approx 18.438 \text{ ly}$$

Астероидът Оумуамуа е долетял при нас от направление, което отстои на ъгъл $\delta = 5^\circ$ от посоката към Вега. За да произхожда този астероид от близките околности на Вега, неговата траектория трябва да се пресича с траекторията на Вега в някаква точка в миналото, или по-точно да започва от тази точка. На схемата тази точка е означена с X. От момента, в който астероидът е напуснал околностите на Вега, до момента на прелитането му покрай Слънцето, астероидът е изминал отсечката XS, а Вега е изминала отсечката XV. Можем да намерим дължините на тези отсечки:

$$XS = \frac{SA}{\cos(\beta + \delta)} \approx 27.728 \text{ ly}$$

$$XA = \frac{SA}{\sin(\beta + \delta)} \approx 21.277 \text{ ly}$$

$$XV = XA - AV = 2.839 \text{ ly}$$

Вега и астероидът трябва да изминат отсечките XV и XS за едно и също време. Отношението на тези две разстояния е:

$$\frac{XS}{XV} \approx 9.8$$

Оттук следва, че скоростта на астероида трябва да е почти 10 пъти по-голяма от скоростта на Вега. Но отношението на тези две скорости в действителност е:

$$\frac{v}{v_v} \approx 1.45$$

Оттук заключаваме, че Оумуамуа не може да произхожда от близките околности на Вега. За да е изпълнено това, би трябвало ъгълът δ да е значително по-голям. Освен това траекторията на астероида трябва да е разположена така, че да лежи в равнината, определена от положението на Слънцето и траекторията на Вега.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За обосновано доказателство, че астероидът не принадлежи към Слънчевата система – 2 т.

За определяне на скоростта на астероида след отдалечаването му от Слънцето на голямо разстояние – 5 т.

За разсъждения и пресмятания относно предположението астероидът да произхожда от близките околности на Вега – 4 т.

За правилно заключение – 1 т.

3 задача. Пасажи и петна. Понякога за земния наблюдател планетите Меркурий и Венера могат да преминат пред диска на Слънцето. Това явление се нарича пасаж.

• **А)** Пресметнете с колко процента намалява осветеността, която Слънцето създава върху Земята, ако пред него преминава планетата Венера.

• **Б)** Известно е, че температурата на слънчевите петна е около 4 500 К. Петно с какъв размер трябва да се появи в центъра на видимия слънчев диск, за да намалее осветеността, създавана от Слънцето с толкова процента, с колкото намалява при пасаж на Венера?

В) Биха ли се виждали такива петна с невъоръжено око от Земята?

Справочни данни:

Радиус на орбитата на Земята - $149,6 \times 10^6$ km

Радиус на Венера – 6 050 km

Радиус на орбитата на Венера – 108×10^6 km

Температура на повърхността на Слънцето – 5 780 К

Разделителна способност на човешкото око – 2' (дъгови минути)

Решение:

А) Нека с R да означим радиуса на Венера, а с r_1 и r_2 орбиталните радиуси, съответно на Земята и на Венера.

Когато Венера преминава пред диска на Слънцето, тя се намира точно между Земята и Слънцето. Тогава разстоянието между Венера и Земята е:

$$r = r_1 - r_2.$$

Видимият ъглов размер на Венера в тази конфигурация е:

$$\delta_B = \frac{2R}{r_1 - r_2} \approx 60''$$

Видимият ъглов диаметър на Слънцето е:

$$\delta_{\text{СЛ}} = \frac{2R_{\text{СЛ}}}{r_1} \approx 1919''$$

Осветеността, която Слънцето създава върху Земята ще намалее с толкова процента, с колкото намалява неговата видима излъчваща площ, защото дискът на Венера, който се наблюдава от Земята по време на пасажа е изцяло тъмен.

Следователно, частта, с която осветеността ще намалее е:

$$X = \left(\frac{\delta_B}{\delta_{\text{СЛ}}}\right)^2 \cdot 100\% \approx 0,1\%$$

Б) Нека да означим с T_S температурата на петната, а с T – обичайната фотосферна температура на Слънцето.

За осветеността E_0 , която Слънцето създава, когато върху повърхността му няма петна, можем да запишем:

$$E_0 \sim \delta_{\text{СЛ}}^2 T^4$$

Ако по слънчевия диск се е появило кръгло петно с видим ъглов диаметър δ_S , то за създаваната осветеност E е в сила:

$$E \sim (\delta_{\text{СЛ}}^2 - \delta_S^2) T^4 + \delta_S^4 T_S^4$$

Понеже осветеността при появата на това петно, осветеността трябва да намалее с част X , то в сила е следното равенство:

$$X = \frac{E_0 - E}{E_0} = \frac{\delta_{\text{СЛ}}^2 T^4 - (\delta_{\text{СЛ}}^2 - \delta_S^2) T^4 - \delta_S^4 T_S^4}{\delta_{\text{СЛ}}^2 T^4} = \frac{\delta_S^2 (T^4 - T_S^4)}{\delta_{\text{СЛ}}^2 T^4}$$

От тук получаваме, че:

$$\delta_S = \sqrt{\frac{X \cdot T^4}{T^4 - T_S^4}} \delta_{\text{СЛ}} \approx 76''.$$

Линейният размер на петното е:

$$D = r_1 \cdot \delta_S [\text{rad}] \approx 55\,300 \text{ km}$$

В) Видимият ъглов размер на петното е по-малък от разделителната способност на човешкото око. Това означава, че то няма да може да се види с невъоръжено око.

Критерии за оценяване (общо – 12т):

А) – 5т

- За намиране на ъгловите размери на Слънцето и Венера – 1т.
- За съобразяване, че осветеността ще намалее толкова пъти, колкото пъти намалява видимата ъглова площ на Слънцето и правилен математически израз – 3т
- За правилен краен буквен израз и краен числен резултат – 1т.

Б) – 6т.

- За правилно математическо изразяване на осветеността, която Слънцето създава когато върху диска му няма петно – 1т.
- За правилно изразяване на осветеността, която Слънцето създава когато върху диска му има петно – 2т.
- За правилни преобразувания, с помощта на които се намира видимият ъглов или линейният размер на петното и краен буквен израз – 2т.
- За верен числен резултат – 1т.

B) – 1т.

- За верен извод, че петното няма да се вижда с невъоръжено око – 1т.

4 задача. Привидно еднакви. Галактиката PGC 2469351 се наблюдава близо до галактиката M101 по небето. Звезда А в M101 и звезда В в PGC 2469351 са с еднакъв видим блясък (звездна величина $30^m.5$) и имат напълно еднакви цветове. Ако можем да получим спектри на двете звезди с ниска спектрална разделителна способност, щяхме да установим, че звездата А е от спектрален клас А, а звездата В е от спектрален клас В. Червеното отместване на галактиката PGC 2469351 е $z_B = 0.075$. Разстоянието до галактиката M101 е 6.4 Мрс. Приемете, че поглъщането на светлината в междузвездната и междугалактична среда е пренебрежимо малко за двете звезди.

- А) Какво е разстоянието до галактиката PGC 2469351?
- Б) Какви са абсолютните звездни величини на двете звезди?
- В) Каква е разликата в повърхностните температури на двете звезди?
- Г) Оценете масите на двете звезди.

Справочни данни:

Константа в закона на Хъбъл-Лъомер – 70 (km/s)/Mpc

Скорост на светлината – $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Решение:

А) Скоростта на отдалечаване на галактиката PGC 2469351 е

$$v_{RB} = z_B c = 22500 \text{ km/s}$$

По закона на Хъбъл разстоянието до галактиката е приблизително

$$r_B = \frac{v_{RB}}{H_0} = 321 \text{ Mpc}$$

(3т.)

Б) Връзката между видима (m) и абсолютна (M) звездна величина на звезда на разстояние r е

$$m - M = 5 \lg(r) - 5$$

Пресмятаме и получаваме $M_A = 1,5$ и $M_B = -7,0$. (3т.)

В) Двете звезди имат еднакви наблюдавани цветове, но различни спектрални класове. Това е така, тъй като спектърът на В звездата е червено отместен така че да е близък по цветове до спектъра на А звезда. Тъй като червеното отместване е само 0,075, спектрите на двете звезди трябва да са близо до границата между класове А и В – около 10 000 К. По закона на Вин ако пикът на излъчването е отместен 1,075 пъти, то и наблюдаваната ефективна температура е отместена 1,075 пъти. Съответно, разликата между двете температури е около $0,075 \cdot 10000 = 750 \text{ K}$. (3т.)

Г) А звездата е с абсолютна звездна величина +1,5 – приблизително на главната последователност, с маса около 2 слънчеви маси. В звездата е с абсолютна звездна величина -7,0 – свръхгигант, с маса над 15 слънчеви маси. (Известна подобна звезда е Ригел – маса 21 слънчеви, спектрален клас В8, абсолютна звездна величина -7,8). (3т.)

5 задача. Звездно небе. Виждате снимка на звездното небе, направена на 21 юни в 22:30h по Гринуичко време.

- **А)** Определете приблизително географската ширина и дължина на мястото, където се е намирал фотографът.

- **Б)** Приблизително къде по Земята се намира това място?
Използвайте дадената ви звездна карта.

Решение: Разглеждаме снимката и виждаме, че се вижда физическия хоризонт. Има различни обекти на него, както и места, които вероятно, са близки до математическия хоризонт. Това означава, че снимката е правена с All Sky камера с поле от около 180° . Лесно намираме съзвездията Голяма и Малка мечка и Полярната звезда.

Най-очевидният метод е да се опитае да намерим височината на Полярната звезда над хоризонта. За целта трябва на снимката да намерим положението на зенита. Използваме метода на хордите и намираме зенита, като използваме чисти участъци от хоризонта. Получаваме, че зенитът е на около 3 мм от звездата Некар (β Boo – Бета Воловар). (Тези определения, поради несъвсем чистия и добре дефиниран хоризонт, едва ли са много точни. Затова ще потърсим и други методи за решаване на проблема.) Северният небесен полюс се намира на около половин градус от Полярната звезда, приблизително в посока към звездата Кохаб. Измерваме радиуса на снимката и получаваме, че е 75 мм, т.е. мащабът е 0.83 мм на градус. Това означава, че половин градус е около 0.4 мм. Означаваме положението на Северния небесен полюс на снимката. Измерваме разстоянието от полюса до хоризонта и получаваме 25.6 мм. Това отговаря на височина на полюса около 31° над хоризонта. Това не е реалистичен резултат. Още повече, че лесно намираме съзвездието Касиопея близо до северния хоризонт и ясно се вижда, че то е силно деформирано. Следователно мащабите на снимката на различни зенитни разстояния са различни и не може да получим точен резултат по този метод.

Втори начин е като намерим деклинацията на зенита. За целта пренасяме положението на зенита на картата и чрез интерполация определяме неговата деклинация, като използваме координатната мрежа. Получаваме, че $\delta = 42^\circ$. Понеже деклинацията на зенита е равна на географската ширина, получаваме, че $\varphi = 42^\circ$.

Трети начин е като се опитае да определим деклинацията на звезди близо до северния хоризонт. Възможно е, например, да използваме звездите от съзвездието Касиопея. Нека, например, измерим разстоянието между линията съединяваща β и γ Cas и измерим разстоянието от тази линия до α Cas. На снимката то е около 2 мм. Измерваме на картата същото разстояние и получаваме 3 мм. Мащабът на картата е 0.8 мм на градус. Следователно това разстояние е 3.75° . Виждаме, че то се нанася около 2.5 пъти от α Cas до хоризонта, което отговаря на около 9.4° . Пресмятаме чрез интерполация, че деклинацията на α Cas е 56.5° . Тогава деклинацията на точка от северния хоризонт е приблизително 47.1° . Това означава, че географската ширина на мястото е

$$\varphi = 90^\circ - \delta = 42.9^\circ$$

Това определение е близо до предишното и затова може да приемем, че географската ширина е около 42.5° . *Грешката, вероятно, е не по-малка от 1 градус но, както ще видим, при географската дължина тя не е по-добра.*

Знаем кога е направена снимката (датата и времето по Гринуич). За да определим географската дължина трябва да определим местното слънчево време за мястото от което е направена снимката. Виждаме, че в посока юг меридианът на мястото има ректасцензия $15^h 12^m$. Следователно пролетната равноденствена точка е на същия ъгъл от меридиана

на мястото, в западна посока. Датата на която е направена снимката е 21 юни. Това е датата на лятното слънцестоене. Тогава Слънцето има ректасцензия 6^h (с точност $1-2^m$). Следователно часовият ъгъл на Слънцето е 9^h12^m .

Времето по Гринуич е 22^h30^m . Остават 1.5 часа до полунощ, т.е. до долната кулминация на Слънцето, когато часовият му ъгъл ще бъде 12^h . Следователно в момента на наблюдение Слънцето има часов ъгъл 10^h30^m . Разликата между часовите ъгли се дължи на разликата в географските дължини на двете точки. Часовият ъгъл на точката от която е получено изображението е по-малък и следователно се намира на запад от Гринуичкия меридиан на ъгъл равен на 1^h18^m . Това е и западната географска дължина на мястото на снимане.

Тук ние не отчитаме уравнението на времето на 21 юни. Може да си спомним, че в средата на юни уравнението на времето пресича нулевата линия и след това изоставането на „истинското“ слънце от „средното“ леко нараства. Към 21 юни това изоставане е по-малко от 2 минути, т.е. внасяната грешка при пресмятане на часовия ъгъл на Слънцето на Гринуичкия меридиан е по-малка от половин градус и ние няма да я вземаме предвид.

Очевидно фотографът попада в Атлантическия океан. Меридианът минава през Исландия, но точката е много по на юг, срещу Пиренейския полуостров, над изолирана структура съдържаща много подводни вулкани.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилни разсъждения и намиране на зенита – 2т.

За правилно подбиране на метод за определяне на географската ширина и определяне – 4т.

За правилни разсъждения и намиране на географската дължина – 4т.

За правилно преценяване на местоположението на фотографа – 2т.

