

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ
XXVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
<http://astro-olymp.org>

I кръг
Ученици от 9-10 клас – решения

1 задача. Звезди от миналото. Често пъти хората казват „Звездите, които астрономите изследват, са толкова далеч от нас, че е напълно възможно много от тях вече да не съществуват“.

• **А)** Наистина ли това е вярно за повечето звезди от Млечния път? Обосновайте Вашия отговор.

• **Б)** Посочете поне три примера за звезди от нашата Галактика, които можем да наблюдаваме на небето, и които действително е възможно вече да не съществуват във вида, в който ги познаваме. Какво може да им се е случило?

• **В)** Възможно ли е в момента, в който наблюдаваме образуването на звезда в галактиката Андромеда (M31), животът на тази звезда вече да е приключил?

Решение:

А) Млечният път е спирална галактика и нейният диаметър се оценява на около 90 000 светлинни години. Това означава, че на светлината, която е излъчена от някоя звезда, намираща се в нашата Галактика, ѝ е необходимо най-много време 90 000 години, за да достигне от единия край до другия. Слънчевата система е на разстояние около 26 000 светлинни години от центъра на Млечния път и се намира с добра точност в равнината на диска на Галактиката. Това означава, че светлината, излъчена от най-далечната от нас звезда, може да достигне до нас за около 64-65 000 години. Този интервал от време не е съществена част от времето за живот на практически всички звезди в Млечния път. Обикновено, продължителността на интервала от време, през който една звезда съществува, е от порядъка на стотици милиони и дори милиарди години (*за повечето звезди дори десетки милиарди, защото по-голямата част от звездите в нашата Галактика са малкомасивни червени джуджета*). Следователно, да се твърди, че е възможно съществена част от звездите в Галактиката ни, които астрономите изследват, вече не съществуват, не е правилно. Това може да бъде коректно само за някои, които се намират в съвсем крайни стадии на своя живот. А освен това голямата част от звездите са на значително по-малко разстояние от нас.

Б) Както споменахме и в предното подусловие, за да е в сила ситуация, при която една звезда от Млечния път, наблюдавана в наше време от Земята, вече е завършила своя живот, ние трябва да я наблюдаваме в съвсем крайните стадии на нейната еволюция. Такива звезди биха могли да бъдат червени гиганти и свръхгиганти. Това са масивни звезди гиганти, които са на финала на своя живот и на които предстои много скоро (в астрономически мащаби за време) да избухнат като свръхнови звезди. Примери за такива звезди са: Бетелгейзе, Антарес, μ от Цефей (Гранатовата звезда) и т.н.

Това, което може да им се е случило, е да са избухнали като свръхнова звезда, но все още светлината излъчена при експлозията, да не е достигнала до нас.

В) Галактиката Андромеда се намира на разстояние около 2.5 милиона светлинни години от нас. Това означава, че светлината, която е излъчена от там, достига до нас след 2.5 милиона години. (*В различните източници могат да бъдат намерени слабо различаващи се стойности на това разстояние. Крайният извод не зависи от тези несъществени разлики.*) За да е изпълнен описаният в условието на задачата сценарий, необходимо животът на тази звезда да бъде по-кратък от този интервал от време. Знаем,

че „животът“ на Слънцето продължава около 10 милиарда години, а също така знаем, че колкото по-масивна е една звезда, за толкова по-кратко време тя изразходва своето ядрено гориво. Следователно, ако съществуват такива звезди, то те би трябвало да бъдат съществено по-масивни от нашето Слънце, в момента, в който са се образували. Действително, най-масивните звезди, които са от спектрален клас О, докато лежат на Главната последователност, имат време за живот няколко милиона години. *Тук е уместно да се отбележи, че такива звезди са изключително редки. Една на няколко милиона е такава.* Оказва се, че дори и гигантите от спектрален клас О със сравнително по-малка маса преминават през всички етапи на своята еволюция за около 10 милиона години. Това означава, че ако звезда, която изпълнява описаното в задачата условие съществува, то тя трябва да е масивен представител на този спектрален клас О.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За правилни разсъждения относно това дали повечето звезди от Млечния път вече са изчезнали – 2 т.

За правилно заключение – 1 т.

За правилно посочени три звезди, които може да са завършили своя живот – 3 x 0.5 т.

За правилен отговор какво може да им се е случило – 2 т.

За правдоподобна стойност на разстоянието до галактиката Андромеда – 0.5 т.

За разсъждения относно това дали съществуват звезди, чието време за живот да е толкова кратко – 2 т.

За правилен извод дали е възможно да съществуват звезди, изпълняващи условието – 1 т.

2 задача. В търсене на Дядо Коледа. Вие разполагате със самолет, който изминава 1000 км за един час. Решили сте да посетите работилницата на Дядо Коледа. Тръгвате от Бургас (географска ширина 42.5° с. ш.), летите на север и след 2 часа стигате до финландския град Котка (60.5° с. ш.).

Оттам продължавате още на север към Рованиemi (66.5° с. ш.) – прочут град, свързан с Дядо Коледа. Но не намирате там работилницата му и се отправяте към северния полюс.

Кацате върху ледена плоча, наоколо е само сняг. Към вас обаче се приближава голям бял мечок и ви прошепва на ухото истинското място – градчето Ууманак (Uumannaq) в Гренландия ($70^\circ 40'$ с.ш.). Достигате дотам и откривате къщата на Дядо Коледа. Пред нея стои голяма пощенска кутия, където се получават писмата от децата.



- А) Общо колко километра път сте изминали с вашия самолет?
- Б) Вие тръгвате на 22 декември в 9 ч. 30 мин. от Бургас и при всяко междинно кацане на самолета престоявате по 1 час. Когато се озовете в Ууманак ден ли ще бъде или нощ?

Решение:

Първо намираме разликата между географските ширини на градовете Бургас и Котка:

$$60.5^\circ - 42.5^\circ = 18^\circ$$

Самолетът полита от Бургас право на север и изминава тези 18° по географска ширина за 2 часа със скорост 1000 км/ч. Следователно разстоянието между Бургас и Котка е равно на 2000 км, а на един градус по географска ширина съответства разстояние:

$$2000 \text{ км} / 18^\circ \approx 111.11 \text{ км}$$

От Котка самолетът достига до северния полюс, движейки се отново право на север. Разстоянието, което той прелита, ще бъде:

$$(90^\circ - 60.5^\circ) \times 111.11 \text{ км} \approx 3277.75 \text{ км}$$

Според напътствието на белия мечок от северния полюс самолетът се отправя към град Уманак в Гренландия. Географската ширина на този град е:

$$70^\circ 40' \approx 70.667^\circ$$

Прелетяното разстояние ще бъде:

$$(90^\circ - 70.667^\circ) \times 111.11 \text{ км} \approx 2148.09 \text{ км}$$

Общият път, изминат от самолета, е:

$$2000 + 3277.75 + 2148.09 \approx 7425.84 \text{ км}$$

Междинните кацания на самолета са три – в град Котка, в Рованиеми и на северния полюс. При тях са правени почивки от по 1 час. Следователно общото време на пътешествието е:

$$\frac{7425.84 \text{ км}}{1000 \text{ км/ч}} + 3 \text{ ч. (почивки)} \approx 10.42 \text{ часа} \approx 10 \text{ ч. } 26 \text{ мин.}$$

Денят, в който се извършва това пътешествие, е 22 декември – денят на зимното слънцестояние. Географската ширина на Уманак е $70^\circ 40'$. Това означава, че градът се намира по на север от северната полярна окръжност, чиято географска ширина е $66^\circ 34'$. На тази дата и в определен брой дни около нея в Уманак въобще няма да изгрява Слънцето – там ще бъде непрекъсната нощ. Следователно при пристигането на самолета в Уманак ще бъде нощ.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За определяне на разстоянията от Бургас до Котка и до северния полюс – 3 т.

За определяне на разстоянието от северния полюс до Уманак – 2 т.

За определяне на общото пропътувано разстояние – 1 т.

За определяне на общата продължителност на пътешествието – 2 т.

За правилен отговор дали в Уманак ще бъде ден или нощ и обяснение – 2 т.

3 задача. Новогодишен маратон. След изтичането на срока на експлоатация на Международната космическа станция, я купува един ентусиазиран милиардер, с намерение да я използва още няколко години. Той веднага изпраща екип от астронавти на борда ѝ, със задача да я ремонтират и да променят орбитата ѝ. След промяната на орбитата, тя вече се движи в екваториалната равнина на Земята с период равен на 90 минути. Процедурите приключват на 31 декември и въодушевените млади астронавти решават да отбележат това, като посрещат Нова година всеки път, когато преминават над меридиан, за който настъпва Нова година по местно слънчево време.

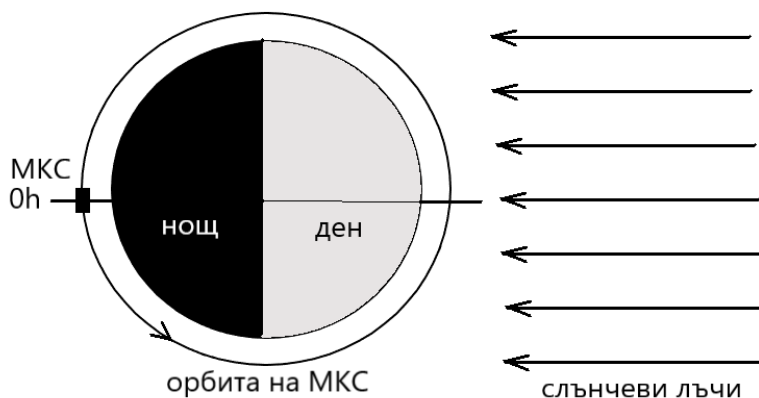
- А) Колко пъти ще се наложи на астронавтите да посрещнат Нова година?
- Б) Възможно ли е да се случи така, че те да посрещат понякога Нова година заедно с някои от жителите на Земята и колко пъти?

Решение:

В наше време Международната космическа станция (МКС) се движи по своята орбита в същата посока, в която става околоосното въртене на Земята. Ще предположим, че след промяната на равнината на нейната орбита посоката на движение на станцията пак остава същата по отношение на въртенето на Земята – от запад на изток.

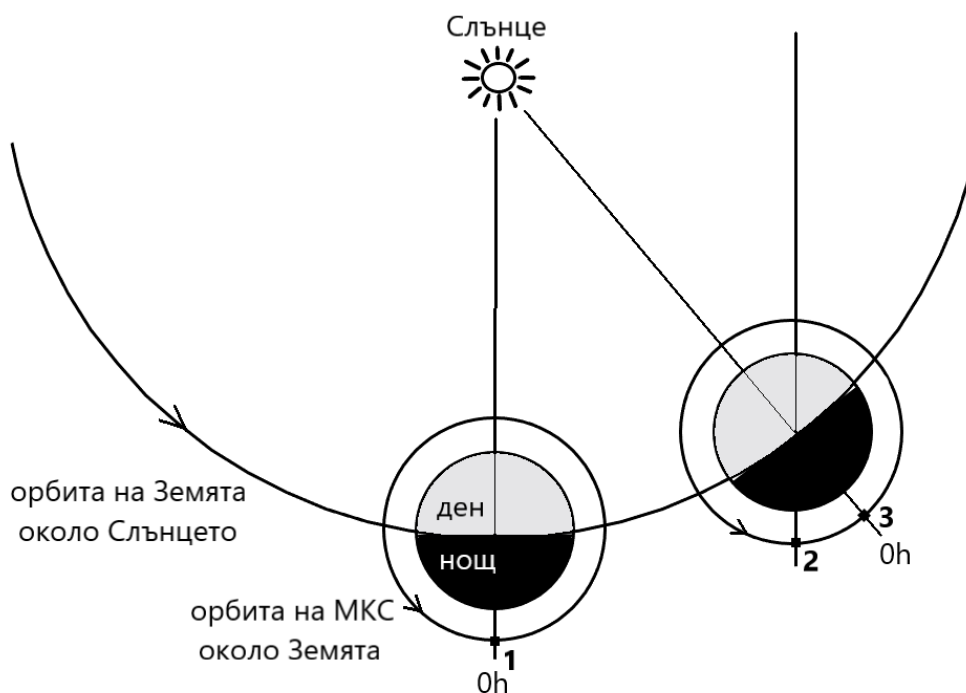
Нека първо да си отговорим на въпроса къде по Земята най-рано настъпва Новата година по местно слънчево време, или къде най-рано настъпва моментът $0^{\text{h}}00^{\text{m}}00^{\text{s}}$ на 1 януари. Това би трябвало да се случва точно на 180-градусовия меридиан, наричан още меридиан на смяна на датите. Миг след този момент на запад от въпросния меридиан започва да се появява съвсем тесен сектор от земната повърхност, където вече е Нова година и с течение на времето този сектор се разширява, тъй като 0 часа по слънчево време настъпва все по-на запад и по-на запад. Относно земната повърхност линията, на която е 0 часа по слънчево време, се движи от изток на запад. След 24 часа тази линия отново съвпада със 180-градусовия меридиан. В този момент на цялото земно кълбо датата е 1 януари. Но колко е часът по слънчево време на самия 180-градусов меридиан? Погледнато откъм източната му страна можем условно да кажем, че е 24 часа на 1 януари – последният миг от тази дата върху земното кълбо. Погледнато откъм източната му страна обаче, можем да кажем, че е 0 часа от 2 януари.

От нашите разсъждения дотук следва, че линията, на която е 0 часа по слънчево време, или все едно, линията, където настъпва Новата година, шества от изток на запад по земното кълбо в продължение на 24 часа. През това време Международната космическа станция прави $24 \text{ ч.} \times 60 \text{ мин.} / 90 \text{ мин.} = 16$ обиколки на Земята. Следователно тя пресича тази линия 16 пъти и космонавтите на борда ѝ ще могат да отбележат настъпването на новата година също толкова пъти. Трябва да отбележим, че движението на станцията не се влияе от околоосното въртене на самата Земя. Станцията просто пресича 16 пъти линията Земя-Слънце над земния меридиан, за който в дадения момент е 0 часа по слънчево време.



Това решение, обаче, не е точно. Тук не е отчетено движението на Земята около Слънцето. В действителност ситуацията ще изглежда така, както е показано на следващата фигура.

Нека в даден момент станцията е в положение 1 на схемата и космонавтите посрещат Новата година. Точно след една обиколка около Земята станцията се намира в положение 2. Но Земята се е преместила по своята орбита около Слънцето и станцията не се намира над меридиан, за който е 0 часа. Следващата среща на станцията с такъв меридиан става малко по-късно, когато тя е в положение 3. Следователно интервалът от време между два момента, в които космонавтите отбелязват настъпването на Новата година, е малко по-дълъг от 90 минути. За времето от 24 часа, през което линията, на която е 0 часа, прави своята обиколка около цялото земно кълбо, станцията ще извърши малко по-малко от 16 обиколки около Земята относно тази линия и ще я пресече 15 пъти. Но ако космическата станция се намира точно над 180-градусовия меридиан, когато там е 0 часа по слънчево време на 1 януари или съвсем малко преди този момент, то за 15 обиколки около Земята тя ще успее да пресече линията на настъпването на Новата година 16 пъти.



Макар това да не е абсолютно необходимо за решаването на задачата, бихме могли да пресметнем периода P' между два момента, в които космонавтите на борда на станцията посрещат Новата година по формулата:

$$\frac{1}{P'} = \frac{1}{P} - \frac{1}{T_0}$$

където P е орбиталният период на станцията около Земята, а T_0 е периодът на движение на Земята около Слънцето.

$$P' \approx 90 \text{ min } 0.92 \text{ sec}$$

Нека за простота да приемем, че границите на часовите пояса са прекарани през 1 час по географска дължина точно по съответните земни меридиани. Космонавтите биха могли да посрещнат Новата година заедно с жителите на даден часови пояс, само ако прелитат над неговия централен меридиан точно когато там е 0 часа по слънчево време. Нека първо приемем, че времето между две преминавания на станцията през линията на настъпване на Нова година е точно 90 минути. За такова време въпросната линия ще се премести на един и половина часови пояса и станцията ще се окаже над граничния меридиан между два часови пояса. След още един период от 90 минути станцията ще бъде над централния меридиан на часови пояс, намиращ се на 2 часа по географска дължина след първия часови пояс. Следователно така космонавтите ще посрещат Новата година заедно с жителите на Земята на всяка втора своя обиколка, или общо 8 пъти. Но трябва да отчетем факта, че след първото посрещане на Новата година заедно с жителите на Земята, космонавтите ще прелетят отново над линията, на която е 0 часа, след малко повече от 90 минути. За такова време линията, на която е 0 часа, ще се придвижи на малко повече от един и половина часови пояса. Оттук следва, че е възможно космонавтите да посрещнат Новата година по слънчево време заедно с жителите на Земята от съответната територия, над която прелитат, най-много само един път или нито веднъж. Задачата силно се усложнява, ако отчетем официално очертаните граници на часовите пояса, които не следват земните меридиани. Тук не отчитаме също и уравнението на времето.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За правилни разсъждения при какви условия космонавтите от станцията посрещат Новата година по слънчево време – 2 т.

За правилни разсъждения кога настъпва следващото посрещане на Новата година – 2 т.

За правилен извод колко пъти космонавтите биха могли да посрещнат Новата година – 3 т.

За съобразяване на възможността Новата година да бъде посрещната не 15, а 16 пъти – 1 т.

За правилни разсъждения относно възможността космонавтите да посрещнат Новата година заедно с жителите на територията, над която прелитат – 2 т.

Забележка: Да се оценява и решението без отчитане на ефекта от движението на Земята около Слънцето при правилни по-нататъшни разсъждения, но в такъв случай общата оценка да се намалява с 3 т.

4 задача. Четири спътника на Уран. Уран има 27 известни спътника, повечето от които носят имена на герои от произведения на Уилям Шекспир и Александър Поуп. Спътниците на Уран, за които се споменава в тази задача, се движат по кръгови орбити.

А) Спътникът Ариел има радиус на орбитата 191 000 km и орбитален период 2.52 дни. Пресметнете скоростта на Ариел по орбитата в километри за секунда. **(2т.)**

Б) Спътникът Умбриел има радиус на орбитата 266 300 km. Пресметнете орбиталния период на Умбриел около Уран. *Упътване: Сравнете с Ариел. Използвайте III закон на Кеплер.* **(2т.)**

В) Спътникът Титания има радиус 788 километра и средна плътност 1.71 пъти по-висока от плътността на водата при нормални условия. Колко пъти по-малка е масата на Ариел от тази на Луната? Радиусът на Луната е 1738 километра, а средната ѝ плътност е 3.34 g/cm³. **(3т.)**

Г) Спътникът Оберон има радиус 761 километра и маса 194 000 пъти по-малка от тази на Земята. Колко пъти по-малко ще тежи космонавт на повърхността на Оберон, отколкото на Земята? **(3т.)**

Решение:

А) Скоростта v на спътник по кръгова орбита с радиус r е равна на обиколката, разделена на периода T . За Ариел:

$$v_A = \frac{2\pi r_A}{T_A} = 476225 \text{ km/d} = 5.51 \text{ km/s}$$

(2т.)

Б) За спътник с радиус на орбитата r и орбитален период T около планета с маса M важи III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{GM}{4\pi^2}$$

Сравняваме Ариел с Умбриел (масата на Уран е една и съща в двете уравнения) като делим почленно и получаваме

$$\frac{r_A^3}{T_A^2} = \frac{r_U^3}{T_U^2}$$
$$T_U = T_A \left(\frac{r_U}{r_A} \right)^{3/2} = 2.52 \left(\frac{266300}{191000} \right)^{3/2} \text{ d} = 4.15 \text{ d}$$

Орбиталният период на Умбриел около Уран е приблизително 4.15 дни. **(2т.)**

В) Водата при нормални условия има плътност 1 g/cm^3 , т.е. средната плътност на Титания е $\rho_T = 1.71 \text{ g/cm}^3$.

Масата на тяло с плътност ρ и обем V е

$$M = \rho V$$

Обемът на сфера с радиус R е

$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

Заместваме и получаваме

$$M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho$$

Сравняваме Титания с Луната като делим почленно горното уравнение за двете и получаваме

$$\frac{M_T}{M_L} = \left(\frac{R_T}{R_L}\right)^3 \left(\frac{\rho_T}{\rho_L}\right) = 0.0477 = \frac{1}{20.96}$$

Масата на Титания е около 21 пъти по-малка от тази на Луната. **(3т.)**

Г) Гравитационното ускорение на повърхността на планета или сферично тяло с маса M и радиус R е

$$a_G = \frac{GM}{R^2}$$

За земната повърхност $a_G = g = 9.8 \text{ m/s}^2$.

Сравняваме Оберон със Земята като разделяме почленно горното уравнение за Оберон и за Земята:

$$\frac{a_{GO}}{g} = \left(\frac{M_O}{M_\oplus}\right) \left(\frac{R_\oplus}{R_O}\right)^2$$

Тъй като силата на тежестта е

$$F_G = ma_G$$

Толкова пъти (a_{GO}/g) по-тежък ще е обект на повърхността на Оберон спрямо повърхността на Земята. За изчислението използваме средния радиус на Земята 6370 km . При дадените стойности получаваме $1/2770$, но входната стойност в условието е **грешна** – трябва да бъде 1940 вместо 194000 , така че верният резултат е $1/27.7$ (на Оберон ще тежим 27.7 пъти по-малко). **Указание за проверяващите: подусловие Г) се оценява с пълните 3 точки при правилни съображения на участника, независимо от получените числени стойности! (3т.)**