

Министерство на образованието и науката
Национално есенно състезание по физика,
17-19 ноември 2023 г., Копривщица
Тема за 10.клас (IV състезателна група)
Решения и указания за оценяване

Задача 1. а) Нека диполът е ориентиран по посока на интензитета на полето, създадено от точковия заряд Q . Тогава резултантната сила е

$$F_1 = qE(r_-) - qE(r_+), \quad (0,5 \text{ т.})$$

където

$$r_- = r - \frac{l}{2}, \quad r_+ = r + \frac{l}{2}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Тъй като $r_- < r_+$, резултантната сила е насочена към заряда-източник, т.е. зарядът Q привлича дипола. **(0,25 т.)** Ето защо имаме

$$F_1 = \frac{kqQ}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{kqQ}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = kqQ \frac{2lr}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \approx \frac{2kQql}{r^3}, \quad (1 \text{ т.})$$

чийто окончателен вид е

$$F_1 = k \frac{2Qp}{r^3}. \quad (0,25 \text{ т.})$$

Промяната на ориентацията на дипола на противоположна не променя големината на силата, а само посоката ѝ, т.е. зарядът отблъсква дипола. **(0,5 т.)**

б) Нека диполният момент е насочен надясно. На разстояние r имаме

$$E_+(r) = \frac{kq}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2}, \quad E_-(r) = \frac{kq}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2}, \quad (1 \text{ т.})$$

като те са насочени в противоположни посоки. **(0,25 т.)** Посоката на резултантния интензитет съвпада с посоката на диполния момент **(0,25 т.)** и по големината е

$$E(r) = \frac{kq}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2} - \frac{kq}{\left(r + \frac{l}{2}\right)^2} = \frac{2kqlr}{\left(r - \frac{l}{2}\right)^2 \left(r + \frac{l}{2}\right)^2} \approx k \frac{2p}{r^3}. \quad (1 \text{ т.})$$

в) По определение търсената сила при еднакво ориентирани диполи е

$$F_{12} = q_2 E_1(r_-) - q_2 E_1(r_+) = k \frac{2p_1 q_2}{\left(r - \frac{l_2}{2}\right)^3} - k \frac{2p_1 q_2}{\left(r + \frac{l_2}{2}\right)^3}. \quad (2 \text{ т.})$$

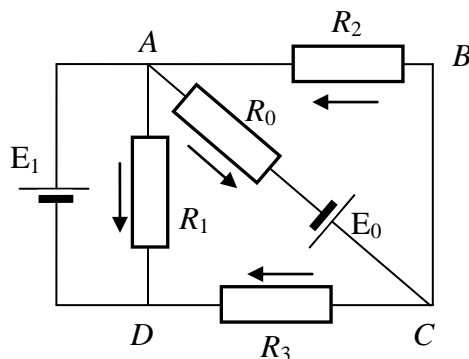
Привеждаме под общ знаменател и отчитаме условието $r \gg l_2$, при което получаваме

$$F_{12} = k \frac{2p_1 q_2 (3r^2 l_2 + l_2^3/4)}{\left(r - \frac{l_2}{2}\right)^3 \left(r + \frac{l_2}{2}\right)^3} \approx k \frac{6p_1 p_2}{r^4}. \quad (1 \text{ т.})$$

Силата е насочена към първия дипол **(0,5 т.)**. Едновременната промяна на посоките на диполните моменти не променя посоката на силата **(0,5 т.)**. Ако диполите са

противоположно насочени, големината на силата не се променя, но дипол 2 се отблъсква от дипол 1. (0,5 т.)

Задача 2. а) На фиг. 1 са показани избраните посоки на токовете през съпротивленията



Фиг. 1

във веригата. Във възел C имаме равенството

$$(1) \quad I_0 = I_2 + I_3. \quad (0,5 \text{ т.})$$

За затворения контур ABC можем да запишем

$$(2) \quad E_0 = I_2 R_2 + I_0 R_0. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Аналогично за контура ABCDA имаме

$$I_1 R_1 - I_3 R_3 + I_2 R_2 = 0. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Като отчетем, че

$$I_1 R_1 = E_1, \quad (0,5 \text{ т.})$$

намираме

$$(3) \quad E_1 = I_3 R_3 - I_2 R_2. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Събираме (2) и (3), при което получаваме

$$(4) \quad E_0 + E_1 = I_3 R_3 + I_0 R_0. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Умножаваме (1) с R_2 и заместваем $I_2 R_2$ в (3), при което намираме равенството

$$(5) \quad E_1 = I_3 (R_2 + R_3) - I_0 R_2. \quad (0,5 \text{ т.})$$

От (4) изразяваме тока I_3 :

$$I_3 = \frac{[(E_0 + E_1) - I_0 R_0]}{R_3}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

след което от (5) за тока I_0 получаваме

$$I_0 = \frac{E_0 (R_2 + R_3) + E_1 R_2}{R_0 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{E_0 (1 + R_3 / R_2) + E_1}{R_0 (1 + R_3 / R_2) + R_3}. \quad (1 \text{ т.})$$

Ще отбележим, че избраната посока на тока I_0 не се променя с изменение на параметрите на елементите във веригата и тя съответства на избраната. (0,5 т.)

б) Като заместим получения израз за I_0 , намираме

$$I_3 = \frac{E_0 R_2 + E_1 (R_2 + R_0)}{R_0 (R_2 + R_3) + R_2 R_3} = \frac{E_0 + E_1 (1 + R_0 / R_2)}{R_0 (1 + R_3 / R_2) + R_3}. \quad (1 \text{ т.})$$

От връзката между токовете следва израза

$$I_2 = \frac{(E_0 - E_1)R_3}{R_0(R_2 + R_3) + R_2R_3} = \frac{E_0 - E_1}{R_0(1 + R_2/R_3) + R_2}. \quad (1 \text{ т.})$$

Посоката на тока I_3 не се променя при промяна на стойностите на характеристиките на елементите **(0,25 т.)**, докато посоката на I_2 съвпада с избраната при $E_0 > E_1$ **(0,25 т.)**; при $E_0 < E_1$ посоката е противоположна **(0,25 т.)**, а при $E_0 = E_1$ токът $I_2 = 0$. **(0,25 т.)**

в) В случая, когато $R_0 = R_2 = R_3 = R$ изразите за токовете имат особено прост вид:

$$I_0 = \frac{2E_0 + E_1}{3R}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$I_2 = \frac{E_0 - E_1}{3R}, \quad (0,5 \text{ т.})$$

$$I_3 = \frac{E_0 + 2E_1}{3R}. \quad (0,5 \text{ т.})$$

Задача 3.а) По определение за период на пружинно махало имаме

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa_0}} \approx 0,31 \text{ s}. \quad (2 \text{ т.})$$

б) Индуцираният в металната равнина електричен заряд е обратен по знак на заряда q **(0,5 т.)**. Следователно имаме $q' < 0$ **(0,5 т.)**.

в) Нека равновесното положение на незареденото пружинно махало се намира на височина x_0 над металната равнина. Тогава в равновесното положение на зареденото пружинно махало, което се намира на разстояние a под другото **(0,5 т.)**, ще бъде изпълнено условието

$$\kappa_0 a = \frac{e^2}{4(x_0 - a)^2}, \quad (1 \text{ т.})$$

където $e^2 = kq^2$. Ако отклоним зареденото махало на разстояние x вертикално надолу, възниква връщаща сила

$$\begin{aligned} F &= \kappa_0(a + x) - \frac{e^2}{4(x_0 - a - x)^2} =, \\ &= \kappa_0 a - \frac{e^2}{4(x_0 - a)^2} + \kappa_0 x + \frac{e^2}{4} \left(\frac{1}{(x_0 - a)^2} - \frac{1}{(x_0 - a - x)^2} \right), \quad (2 \text{ т.}) \end{aligned}$$

откъдето намираме

$$F = \kappa_0 x + \frac{e^2}{4} \frac{[-2(x_0 - a)x + x^2]}{(x_0 - a)^2(x_0 - a - x)^2}. \quad (1 \text{ т.})$$

Тази сила е еластична, когато $x \ll (x_0 - a)$ и има вида

$$F \approx \left(\kappa_0 - \frac{e^2}{2(x_0 - a)^3} \right) x. \quad (1 \text{ т.})$$

Тогава периодът

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\kappa_0 - \frac{e^2}{2(x_0 - a)^3}}} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - 4a \left(\frac{\kappa_0 a}{kq^2} \right)^{1/2}}} \approx 0,37 \text{ s}, \quad (1,5 \text{ т.})$$

където е отчетено, че

$$\frac{1}{(x_0 - a)^3} = \left(\frac{4\kappa_0 a}{e^2} \right)^{3/2}.$$