МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

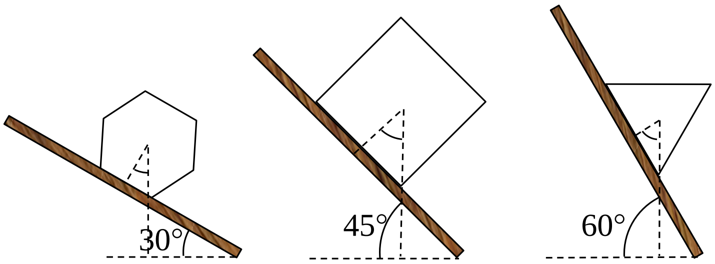
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

София, 22 април 2023 г.

Решения на темата за втора състезателна група (8. клас)

Задача 1. Равновесие и устойчивост

Част 1. Центърът на тежестта на тяло със сечение правилен многоъгълник се намира в геометричния му център. **[0,5 т]** Тялото започва да се търкаля, когато вертикалната линия, минаваща през центъра му, пресече предния му ръб. **[1 т]** Както се вижда от фигурата, за тяло със сечение правилен шестоъгълник (гайката) това става при ъгъл на наклона 30°, за куба – при ъгъл 45°, а за триъгълната призма – при ъгъл 60°.



По **0,5 т** за всеки коректен чертеж и правилно определен ъгъл, общо **[1,5 т]**

Следователно телата ще започнат да се търкалят в реда: 1 – гайката, 2 – кубчето, 3 – призмата. **[1 т]**

Част 2. Известно е, че потенциалната енергия на тяло е $mgh_{\text{цт}}$, където $h_{\text{цт}}$ е височината на неговия център на тежестта. **[1 т]** Ако m е общата маса на рамката, всяко от рамената ѝ има маса $m/2$. **[0,5 т]** Центърът на тежестта на всяко от рамената е по средата на рамото, т.е. на разстояние 6 cm от върха на рамката. **[0,5 т]** В положението, в което е поставена рамката, едното ѝ рамо е хоризонтално, т.е. на нулева височина върху масата. Другото рамо е вертикално и неговият център на тежестта е на височина -6 cm, т.е. на 6 cm под нулевото ниво. Затова пълната потенциална енергия на рамката е:

$$E_{\text{п}} = \left(\frac{m}{2}\right) g\,.0\ \text{cm} - \left(\frac{m}{2}\right) g\,.6\ \text{cm} = -mg\,.3\ \text{cm}. \qquad \textbf{[1,0 т]}$$

Оттук се вижда, че центърът на тежестта на цялата рамка е на височина –3 cm, т.е. на 3 cm под хоризонталното рамо. **[1,0 т]** Но от симетрията на рамката следва, че центърът на тежестта се намира на същото разстояние 3 cm и от вертикалното рамо. **[0,5 т]**

За всеки алтернативен метод за определяне на положението на центъра на тежестта се дават общо 4,5 точки. Например, ученикът може да се досети и обоснове, че центърът на тежестта на рамката разполвява отсечката, свързваща средите на двете рамена (2,5 т) и следователно се намира на равни разстояниия – по 3 cm от рамената (2,0 т).

Рамката ще се наклони или преобърне, когато центърът ѝ на тежестта се окаже на една вертикална линия с ръба на масата. **[0,5 т]** Очевидно в този случай:

$$x = 3\ \text{cm}. \qquad \textbf{[1,0 т]}$$

Задача 2. Трупчета и макари

а) Първи вариант – аналогия с лост

Можем да разглеждаме макарата като двустранен лост с рамена $R_1 = 4$ cm и $R_2 = 5$ cm **[0,5 т]**. Понеже на двете рамена са окачени тела с еднаква маса, лостът ще се наклони в посока на по-дългото рамо 2. **[0,5 т]**. Следователно теглилката 1 ще започне да се издига, а теглилката 2 – да се спуска. **[0,5 т]**.

Втори вариант – закон за запазване на енергията (ЗЗЕ)

Когато теглилките започнат да се движат, тяхната кинетична енергия се увеличава. От ЗЗЕ следва, че при това общата потенциална енергия на теглилките намалява **[0,5 т]**. За едно и също време теглилката 2 се премества на по-голямо разстояние, отколкото теглилката 1, защото нейната нишка е намотана около улей с по-голям радиус **[0,5 т]**. Следователно теглилката 2 се спуска надолу, а 1 се издига нагоре, понеже в този случай потенциална енергия на теглилката 2 намалява с повече, отколкото се увеличава потенциалната енергия на теглилката 1 **[0,5 т]**.

б) Нека разгледаме едно завъртане на макарата. Тогава на улея 1 се намотава част от нишката с дължина $2\pi R_1$ и теглилката 1 се издига нагоре съответно с:

$$\Delta h_1 = 2\pi R_1. \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

За същото време от улея 2 се размотава част от нишката с дължина $2\pi R_2$ и теглилката 2 се спуска надолу с:

$$\Delta h_2 = 2\pi R_2. \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

От двете равенства получаваме, че отношението на пътищата, изминати от двете теглилки, е:

$$\Delta h_1/\Delta h_2 = R_1/R_2. \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

Това съотношение е в сила не само за времето на едно завъртане на макарата, но и за произволно малък интервал от време Δt, когато макарата прави само част от пълното завъртане. Като вземем предвид, че моментната скорост на дадена теглилка е $v = \Delta h/\Delta t$, получаваме:

$$v_1/v_2 = R_1/R_2 = 4/5. \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

в) Нека изберем повърхността на пода като нулево ниво. В началния момент теглилките са неподвижни и имат нулева кинетична енергия. Понеже те се намират на еднаква височина, всяка от тях има потенциална енергия mgh. Следователно пълната механична енергия на системата в началния момент е:

$$E = mgh + mgh = 2mgh. \qquad \textbf{[1,0 т]}$$

Теглилката 2 изминава път $\Delta h_2 = h$, докато достигне пода. За същото време теглилката 1 изминава нагоре път:

$$\Delta h_1 = hR_1/R_2 \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

и в този момент се намира на височина:

$$h_1 = h + \Delta h_1 = h(1 + R_1/R_2) = 9h/5. \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

Общата потенциална енергия на системата в този момент е:

$$E_{\text{п}} = mg \cdot 0 + mgh_1 = 9mgh/5, \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

защото теглилката 2 се намира на нулева височина. Като отчетем кинетичната енергия на теглилките, за пълната механична енергия получаваме израза:

$$E = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 + 9mgh/5,$$ **[0,5 т]**

където v_1 и v_2 са търсените скорости. Тогава от ЗЗЕ имаме:

$$2mgh = mv_1^2/2 + mv_2^2/2 + 9mgh/5.$$ **[0,5 т]**

Като заместим $v_2 = 5v_1/4$, получаваме уравнение за скоростта на първата теглилка:

$$41v_1^2/16 = 2gh/5,$$

откъдето намираме:

$$v_1 = 4\sqrt{2gh/205} \approx 0{,}88\,\mathrm{m/s}.$$ **[1,0 т]**

Съответно за скоростта на втората теглилка имаме:

$$v_2 = 5\sqrt{2gh/205} \approx 1{,}10\,\mathrm{m/s}.$$ **[1,0 т]**

в) В момента, когато теглилката 2 доста пода, нишката престава да „дърпа" теглилката 1 нагоре. Тя обаче има ненулева скорост и продължава да се издига известна време, като се забавя под действие на силата на тежестта. В момента, когато достигне максималната височина $h_{\max}$, теглилката 1 има нулева скорост и нулева кинетична енергия. От ЗЗЕ, приложен за теглилката 1, имаме:

$$\frac{mv_1^2}{2} + mgh_1 = mgh_{\max},$$ **[0,5 т]**

откъдето:

$$h_{\max} = \frac{16h}{205} + \frac{9h}{5} = \frac{77}{41}h \approx 0.94\ \mathrm{m}$$ **[0,5 т]**

Задача 3. Потъване

а) В началния момент скоростта на кълбото е нула и не му действа сила на съпротивление [0,5 т]. Кълбото се ускорява под действие на силата G на тежестта и Архимедовата сила F_{A}. От втория принцип на механиката следва:

$$ma = mg - F_{\mathrm{A}}$$ **[0,5 т]**

Обемът на кълбото е $V = 4\pi R^3/3$, а масата му:

$$m = \rho V = \frac{4\pi R^3\rho}{3}$$ **[0,5 т]**

Архимедовата сила е равна на:

$$F_{\mathrm{A}} = \rho_0 V g = \frac{4\pi R^3\rho_0 g}{3}$$ **[0,5 т]**

След като заместим изразите за m и F_{A} във втория принцип на механиката, изразяваме ускорението в началния момент:

$$a_0 = \left(1 - \frac{\rho_0}{\rho}\right)g$$ **[0,5 т]**

б) Когато започне да потъва надолу, на кълбото действа и сила на съпротивление, насочена нагоре **[0,5 т]**. Напречното сечение на кълбото е кръг с площ $S = \pi R^2$. Следователно големината на силата на съпротивление е:

$$f = \pi C R^2 v^2 \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

След като достигне граничната си скорост, кълбото продължава да се движи с нулево ускорение **[0,5 т]**. От II принцип на механиката следва, че силите, които му действат се уравновесяват:

$$mg = F_{\text{A}} + f \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

Като заместим изразите за m, F_{A} и f във втория принцип на механиката, получаваме уравнението:

$$\frac{4\pi R^3 \rho g}{3} = \frac{4\pi R^3 \rho_0 g}{3} + \pi C \rho_0 R^2 v_{\text{г}}^2,$$

от което намираме граничната скорост:

$$v_{\text{г}} = \sqrt{\frac{4R(\rho - \rho_0)g}{3C\rho_0}} \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

в) Плътността на метала можем да определим, ако измерим началното ускорение на кълбото. От графиката определяме, че в момента $t = 0{,}4$ s, изминатият от кълбото път е $h \approx 0{,}5$ m. **[0,5 т]**. За този малък интервал може да пренебрегнем силата на съпротивление и да приемем, че кълбото се движи равноускорително с ускорение a_0. От закона за равноускорително движение $h = a_0 t^2/2$ намираме:

$$a_0 = \frac{2h}{t^2} \approx \frac{2 \cdot 0{,}5\ \text{m}}{(0{,}4\ \text{s})^2} = 6{,}25\ \text{m/s}^2 \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

От израза за ускорението, получен в т. а), намираме:

$$\rho = \frac{\rho_0 g}{g - a_0} \approx 2760\ \text{kg/m}^3. \qquad \textbf{[1,0 т]}$$

От графиката се вижда, че след първата секунда експерименталните точки лежат практически на една права линия. Това означава, че след този момент кълбото се движи равномерно, т.е. с постоянна скорост, равна на граничната скорост **[0,5 т]**. В момента $t_1 = 1$ s кълбото се намира на дълбочина $h_1 = 2{,}2$ m **[0,5 т]**, а в крайния момент $t_2 = 1{,}8$ s – на дълбочина $h_2 = 4{,}7$ m **[0,5 т]**. От тези данни определяме граничната скорост:

$$v_{\text{г}} = \frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{2{,}5\ \text{m}}{0{,}8\ \text{s}} \approx 3{,}13\ \text{m/s}. \qquad \textbf{[0,5 т]}$$

От израза за граничната скорост в т. б) намираме коефициента на челно съпротивление:

$$C = \frac{4R(\rho - \rho_0)g}{3\rho_0 v_{\text{г}}^2} \approx 0{,}24. \qquad \textbf{[1,0 т]}$$