МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Областен кръг на олимпиадата по физика, 18.02.23

Решения на темата за шеста състезателна група (12. клас) и критерии за оценяване

Упътване към проверителите

1) Дадените решения са примерни. Всяко обосновано алтернативно решение се оценява с максималния за дадената задача и даденото подусловие брой точки. Допуска се и използване на диференциално и интегрално смятане, ако ученикът владее тези методи.
2) За верни се приемат аналитични (буквени) изрази, които съдържат дадени в условието или вече дефинирани в решението величини.
3) Числените отговори се приемат за верни, ако се различават с най-много 5% от дадените в примерното решение.

Задача 1. Изпаряване на метеорит

а) Нека разгледаме тяло с маса m, намиращо се на повърхността на Марс. Действащата му сила на тежестта е равна на гравитационната сила, с която го привлича планетата:

$$mg = \frac{GMm}{R_{\mathrm{M}}^2} \text{ или } g = \frac{GM}{R_{\mathrm{M}}^2},$$ **1,0 т.**

откъдето определяме:

$$M = \frac{gR_{\mathrm{M}}^2}{G} = 6{,}37.10^{23}\,\mathrm{kg}.$$ **1,0 т.**

(0,5 т. за аналитичен израз + 0,5 т. за числен отговор)

б) Разглеждаме определена маса m въглероден диоксид, който заема обем V. От уравнението на Клапейрон-Менделеев имаме:

$$pV = nRT,$$ **1,0 т.**

където:

$$n = \frac{m}{\mu_{\mathrm{CO2}}}$$ **1,0 т.**

е броят молове, а $\mu_{\mathrm{CO2}} = 0{,}044\,\mathrm{kg/mol}$ е моларнтата маса на CO_2. Като заместим n в уравнението на Клапейрон-Менделеев и изполваме дефиницията за плътност $\rho = m/V$, получаваме:

$$\rho = \frac{p\mu_{\mathrm{CO2}}}{RT} = \frac{610\ \mathrm{Pa}\,.\,0{,}044\,\mathrm{kg/mol}}{8{,}31\,\mathrm{J/(mol.K)}\ .200\ \mathrm{K}} \approx 0{,}016\,\mathrm{kg/m^3}\ \ (16\,\mathrm{g/m^3}).$$ **1,0 т.**

(0,5 т. за аналитичен израз + 0,5 т. за числен отговор)

в) В началния момент метеоритът с маса m има потенциална енергия:

$$W_1 = -\frac{GMm}{r}$$

и нулева кинетична енергия. В момента, непосредствено преди удара, метеоритът има потенциална енергия:

$$W_2 = -\frac{GMm}{R_\text{М}}$$

и кинетична енергия:

$$E_\text{к} = \frac{mv^2}{2}.$$

Ако пренебрегнем силите на съпротивление при движение на метеорита в атмосферата, следва, че пълната му енергия се запазва:

$$-\frac{GMm}{R_\text{М}} + \frac{mv^2}{2} = -\frac{Gm}{r}.$$ **1,0 т.**

Оттук изразяваме:

$$v = \sqrt{2GM\left(\frac{1}{R_\text{М}} - \frac{1}{r}\right)}$$ **0,5 т.**

Понеже $r \gg R_\text{М}$, втората дроб в скобите може да бъде пренебрегната. Тогава за скоростта при удара намираме окончателно:

$$v = \sqrt{\frac{2GM}{R_\text{М}}} \text{ или } \sqrt{2gR_\text{М}} \text{ (ако изразим } M \text{ чрез } g \text{ и } R\text{)}$$ **0,5 т.**

Като заместим с известните числени данни в една от двете формули, пресмятаме:

$$v = \sqrt{2\,.\,3{,}72\,\mathrm{m/s^2}\ .\,3{,}38.10^6\mathrm{m}} \approx 5{,}01.10^3\mathrm{m/s}.$$ **0,5 т.**

г) Вътрешната енергия на образуваните железни пари е:

$$U = \frac{3}{2}nRT,$$ **1,0 т.**

където $n = m/\mu_\text{Fe}$ е броят молове желязо в метеорита. От условието следва:

$$\frac{3mRT}{2\mu_\text{Fe}} = \frac{1}{2}E_\text{к} = \frac{mv^2}{4}.$$ **0,5 т.**

Оттук намираме:

$$T = \frac{\mu_\text{Fe}v^2}{6R} = \frac{0{,}056\,\mathrm{kg/mol}\ .\,(5{,}01.10^3\mathrm{m/s})^2}{6\,.\,8{,}31\ \mathrm{J/(mol.\,K)}} \approx 2{,}8.10^4\ \mathrm{K}.$$ **1,0 т.**

(0,5 т. за аналитичен израз + 0,5 т. за числен отговор)

Задача 2. Отскачащо махало

а) Периодът на пружинно махало е:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1{,}26\ \mathrm{s}.$$ **0,5 т.**

(0,5 т. се дават, ако има както аналитичен израз, така и числен резултат)

В началния момент топчето има кинетична енергия:

$$E_\text{к} = \frac{mv_0^2}{2}$$

и нулева потенциална енергия, защото пружината не е деформирана. След като топчето достигне максимално отклонение $x = \pm A$ от равновесното положение, то спира, т.е. кинетичната му енергия е нула, но пружината има потенциална енергия:

$$E_{\text{п}} = \frac{kA^2}{2}.$$

От закона за запазване на енергията следва:

$$\frac{mv_0^2}{2} = \frac{kA^2}{2}, \qquad \textbf{1,0 т.}$$

откъдето намираме:

$$A = v_0\sqrt{\frac{m}{k}} = 0{,}08\ \text{m}\ (8\ \text{cm}) \qquad \textbf{1,0 т.}$$

(0,5 т. за аналитичен израз + 0,5 т. за числен отговор)

б) За да съобразим посоката на скоростта, вземаме предвид, че:

$$\frac{3T}{4} < t < T. \qquad \textbf{0,5 т.}$$

Това означава, че топчето е минало през крайно дясно положение, после – през крайно ляво положение, и в момента се доближава отляво надясно към равновесното положение. Следователно скоростта в момента t = 1 s е насочена надясно. **0,5 т.**

При нулево начално отклонение, както е в случая, законът за хармонично движение се дава с израза:

$$x = A\sin(\omega t), \qquad \textbf{1,0 т.}$$

където $\omega = 2\pi/T = \sqrt{k/m} = 5{,}0\ \text{rad/s}$ е кръговата честота на трептенето. От закона за запазване на енергията имаме:

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kx^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}, \qquad \textbf{1,0 т.}$$

където v е скоростта в момента t. Като вземем предвид тригонометричното тъждество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\ = 1$, и факта, че $v_0 = \omega A$, изразяваме големината на скоростта:

$$v = \sqrt{v_0^2 - \frac{k}{m}x^2} = \sqrt{v_0^2 - \omega^2 A^2 \sin^2(\omega t)} = v_0\cos(\omega t) \qquad \textbf{1,0 т.}$$

Оттук, като заместим с числените данни, намираме:

$$v = 0{,}4\ \text{m/s}\ .\ \cos(5\ \text{rad/s}\ .\ 1\ \text{s}) \approx 0{,}11\ \text{m/s}. \qquad \textbf{0,5 т.}$$

в) Нека t' е моментът, в който топчето за първи път след началото на движението се удря в стената. В този момент $x = d$ и от закона за харомонично трептене имаме:

$$A\sin(\omega t') = d. \qquad \textbf{0,5 т.}$$

Оттук намираме:

$$\sin(\omega t') = \frac{d}{A} = \frac{0{,}04\ \text{m}}{0{,}08\ \text{m}} = \frac{1}{2}. \qquad \textbf{0,5 т.}$$

Следователно $\omega t' = \pi/6$ и:

$$t' = \frac{\pi}{6\omega} = \frac{T}{12} \qquad \textbf{1,0 т.}$$

След като топчето отскочи, то ще се движи същото време t' наляво, докато достигне равновесното положение, а след това още половината от периода на хармоничното трептене, докато мине през крайно ляво положение и се върне обратно в началото. След това процесът се повтаря периодично. Следователно времето за повторение на движението, което е равно на времето между последователните отскачания, е:

$$T_1 = 2t' + \frac{T}{2} = \frac{T}{6} + \frac{T}{2} = \frac{2}{3}T \approx 0{,}84\ \mathrm{s}$$ **1,0 т.**

Задача 3. Топлинен двигател

а) От уравнението на Клапейрон-Менделеев за състоянието a имаме:

$$p_a V_a = nRT_a,$$ **1,0 т.**

откъдето намираме:

$$n = \frac{p_a V_a}{RT_a} = \frac{1.10^5 \mathrm{Pa}\,.\,1.10^{-3}\mathrm{m}^3}{8{,}31\ \mathrm{J/(mol.K)}\,.\,300\ \mathrm{K}} = 4{,}0.10^{-2}\mathrm{mol}.$$ **1,0 т.**

(0,5 т. за буквен израз и 0,5 т. за числен отговор)

б) Удобно е първо да пресметнем температурата в състояние c. Тъй като процесът c-a е изобарен, е в сила уравнението:

$$\frac{T_c}{V_c} = \frac{T_a}{V_a},$$ **1,0 т.**

откъдето:

$$T_c = \frac{T_a V_c}{V_a} = 3T_a = 900\ \mathrm{K}$$ **0,5 т.**

За адиабатния процес b-c имаме:

$$T_b V_b^{\gamma-1} = T_c V_c^{\gamma-1},$$ **1,0 т.**

където:

$$\gamma = \frac{C_p}{C_V} = \frac{5}{3}$$ **1,0 т.**

е показателят на адиабатата на газа. Оттук намираме:

$$T_b = T_c \left(\frac{V_c}{V_b}\right)^{\frac{2}{3}} = 900\ \mathrm{K}\,.\ 3^{\frac{2}{3}} \approx 1870\ \mathrm{K}.$$ **1,0 т.**

При пресмятанията използваме $3^{2/3} = \left(\sqrt[3]{3}\right)^2 \approx 2{,}08$.

в) През изохорния процес a-b газът обменя количество топлина:

$$Q_{ab} = nC_V(T_b - T_a) = \frac{3}{2}nR(T_b - T_a) \approx 783\ \mathrm{J}.$$ **0,5 т.**

(Междинният числен отговор не е задължителен. Точката се дава за записването на един от двата израза в равенството)

Положителната стойност на Q_{ab} означава, че газът получава топлина от външен нагревател. Процесът b-c е адиабатен, което означава, че газът не обменя топлина, т.е.:

$$Q_{bc} = 0\ \text{J}.$$ **0,5 т.**

През изобарния процес *c*-*a* газът обменя количество топлина:

$$Q_{ca} = nC_p(T_a - T_c) = \frac{5}{2}nR(T_a - T_c) \approx -499\ \text{J}.$$ **0,5 т.**

(Междинният числен отговор не е задължителен. Точката се дава за записването на един от двата израза в равенството)

Отрицателната стойност на Q_{bc} означава, че при този процес газът отделя топлина към външен охладител. Тъй като при цикличен процес вътрешната енергия на газа не се променя, т.е. $\Delta U = 0$, от I принцип на термодинамиката следва, че работата, извършена от газа, е:

$$A_{\text{дв}} = Q_{ab} + Q_{bc} + Q_{bc} \approx 284\ \text{J}.$$ **1,0 т.**

(0,5 т. за използването на I принцип и 0,5 т. за числен отговор)

От определението за КПД на двигател следва:

$$\eta = \frac{A_{\text{дв}}}{Q_{ab}} \approx 0{,}36\ (36\%).$$ **1,0 т.**

(0,5 т. за правилно записана дефиниция за КПД и 0,5 т. за числен отговор)