

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**  
**ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, ОБЛАСТЕН КРЪГ, 18 февруари 2023 г.**  
**Решения на темата за 11. клас (пета състезателна група)**

**Задача 1. Фонтан.**

а) Нека началната скорост на струята е  $v_0$ , а началният ъгъл -  $\alpha$ . Тогава хоризонталната скорост след време  $t$  е  $v_x = v_0 \cos \alpha$ , [0.5 т.] а вертикалната скорост -  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt$ . [0.5 т.] Съответно координатите на част от струята след време  $t$  са  $x = v_0 \cos \alpha t$  [0.5 т.] и  $y = v_0 \sin \alpha t - \frac{1}{2}gt^2$ . [0.5 т.] Замествайки  $t$  от първото във второто уравнение,  $y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \alpha)^2}$ . [0.5 т.] Струята ще падне върху основата на фонтана, когато  $y = 0$  или  $x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2(v_0 \cos \alpha)^2} = 0$ , [0.5 т.] откъдето се намира  $x = \frac{2 \sin \alpha \cos \alpha v_0^2}{g} = \frac{\sin 2\alpha v_0^2}{g}$ . [0.5 т.]  $x$  е максимално, когато  $\sin 2\alpha = 1$ ,  $\alpha = 45^\circ$ . [0.5 т.]

б) При максимално издигане на струята  $v_y = v_0 \sin \alpha - gt = 0$ , откъдето  $t = \frac{v_0 \sin \alpha}{g}$ . [0.5 т.] Замествайки в уравнението за координатата  $y$ ,  $y = v_0 \sin \alpha \frac{v_0 \sin \alpha}{g} - \frac{1}{2}g \left(\frac{v_0 \sin \alpha}{g}\right)^2$ ,  $= \frac{v_0^2 \sin^2 \alpha}{2g}$ . [0.5 т.] За струята, която пръска най-надалеч,  $R = \frac{v_0^2}{g}$ . За нея  $h = \frac{v_0^2}{4g} = \frac{R}{4} = 1,6 \text{ m}$ . [1 т.]

в) На най-голяма височина ще пръска струята, която е вертикална. За нея (кинематично или от закона за запазване на енергията)  $H = \frac{v_0^2}{2g} = \frac{R}{2} = 3,2 \text{ m}$ . [2 т.]

г) Началната скорост  $v_0$  на струите, излизаци от фонтана, е  $v_0 = \sqrt{gR} = 8,0 \text{ m/s}$ . [2 т.]

**Задача 2. Телескопът „Джеймс Уеб“**

а) Тъй като силата на тежестта е гравитационна сила, то  $m_1 g = \frac{Gmm_1}{R^2}$ , ( $m_1$  е масата на тяло, намиращо се на повърхността на Земята) откъдето  $m = \frac{gR^2}{G}$ . [2 т.]

б) Движението на Земята се описва с уравнението  $\frac{GMm}{L^2} = m\omega^2 L$ . [0.5 т.] Движението на телескопа се описва с уравнението  $\frac{GM\mu}{(L+x)^2} + \frac{Gm\mu}{x^2} = \mu\omega^2(L+x)$ . [0.5 т.] Съкращавайки на  $m$  в първото уравнение и на  $\mu$  във второто, след което изваждайки първото от второто уравнение, се получава  $\frac{GM}{(L+x)^2} + \frac{Gm}{x^2} - \frac{GM}{L^2} = \omega^2 x$ . [0.5 т.] Лявата част на това уравнение може да се преобразува така:  $\frac{GM}{(L+x)^2} + \frac{Gm}{x^2} - \frac{GM}{L^2} = \frac{GM}{L^2(1+\frac{x}{L})^2} + \frac{Gm}{x^2} - \frac{GM}{L^2} \approx \frac{GM}{L^2} \left(1 - 2\frac{x}{L}\right) + \frac{Gm}{x^2} - \frac{GM}{L^2} = -\frac{2GMx}{L^3} + \frac{Gm}{x^2}$ . [0.5 т.] Замествайки в горното уравнение,  $-\frac{2GMx}{L^3} + \frac{Gm}{x^2} = \omega^2 x$ , [0.5 т.] откъдето след преобразования,  $\frac{Gm}{x^2} = x \left(\frac{2GM}{L^3} + \omega^2\right)$ , [0.5 т.]  $x = \sqrt[3]{\frac{Gm}{\frac{2GM}{L^3} + \omega^2}} =$

$$\sqrt[3]{\frac{Gm}{3\omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{Gm}{3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}. \text{ [1 т.]}$$

в) Тъй като земното ускорение е  $g = \frac{Gm}{R^2}$ , то  $x = \sqrt[3]{\frac{gR^2}{3\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}}$ ,  $x = \sqrt[3]{\frac{g}{12} \left(\frac{RT}{\pi}\right)^2}$ . [2 т.]

г) Замествайки с дадените стойности,  $x \approx 1,50 \cdot 10^9 \text{ m} = 1,50 \cdot 10^6 \text{ km}$ . [2 т.]

### **Задача 3. Флайборд (Flyboard)**

а) За да „виси човекът във въздуха“, трябва силата му на тежестта да е равна на промяната на импулса на струята за единица време, [1 т.]  $Mg = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2\Delta m v}{\Delta t}$  [1 т.] =  $\frac{2\rho\Delta V v}{\Delta t}$  [1 т.] =  $2\rho S v^2$  [1 т.] =  $\frac{\rho\pi d^2 v^2}{2}$ , откъдето  $v = \sqrt{\frac{2Mg}{\rho\pi d^2}}$  [1 т.]  $\approx 7,18 \text{ m/s}$ . [1 т.]

б) Минималната мощност  $P$  на двигателя на джетта, за да осигури движението на водата по описания начин, е  $P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\Delta E_{kin} + \Delta E_{pot}}{\Delta t}$  [1 т.] =  $\frac{\Delta m v^2 / 2 + \Delta m g h}{\Delta t} = \rho S v \left( \frac{v^2}{2} + g h \right)$  =  $\frac{\rho v \pi d^2}{4} \left( \frac{v^2}{2} + g h \right)$  [2 т.]  $\approx 6,4 \text{ kW}$  [1 т.]