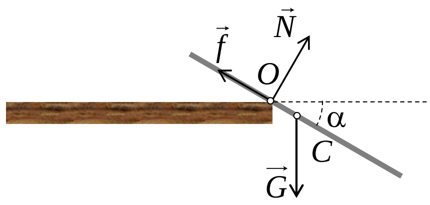
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика
Сливен, 11–13 ноември 2022 г.
Решения на задачите от специалната тема

Задача 1. Преобръщане на пръчка

На фигурата са показани силите, действащи на пръчката:



За всяка сила с правилно означена посока и приложна точка × 0.5 точки: **максимум [1.5]**

Докато започне хлъзгането, пръчката се върти около ръба O на масата. От теоремата на Щайнер намираме инерчния момент на пръчката спрямо т. O:

(1) $$I_O = \frac{1}{12}m\ell^2 + mx^2,$$ **[1.0]**

където $I_C = (1\,/\,12)m\ell^2$ е инерчният момент на пръчката спрямо нейния център на масата C, а $x = |OC|$. Ако пръчката сключва с хоризонта ъгъл α, тя се върти около O с ъглова скорост ω, която може да бъде определена от закона за запазване на енергията:

(2) $$\frac{1}{2}I_O\omega^2 = mgx\sin\alpha,$$ **[1.0]**

понеже силата $\vec{f}$ на триене е приложена към неподвижна точка и не върши работа. Оттук намираме: $\omega^2 = 24gx\sin\alpha/(\ell^2 + 12x^2)$ и съответно определяме нормалното ускорение на центъра на масата:

(3) $$a_n = \omega^2 x = \frac{24gx^2\sin\alpha}{\ell^2 + 12x^2}$$ **[1.0]**

От II принцип на механиката, записан в проекции по дължината на пръчката:

(4) $$ma_n = f - G\sin\alpha,$$ **[0.5]**

изразяваме силата на триене:

(5) $$f = ma_n + mg\sin\alpha = \left(\frac{\ell^2 + 36x^2}{\ell^2 + 12x^2}\right)mg\sin\alpha.$$ **[0.5]**

Нека ε е ъгловото ускорение на пръчката спрямо ръба на масата. От основното уравнение за въртене около неподвижна ос:

(6) $$I_O\varepsilon = mgx\cos\alpha$$ **[1.0]**

определяме тангенциалното ускорение на точка C:

(7) $$a_\tau = \varepsilon x = \frac{12gx^2\cos\alpha}{\ell^2 + 12x^2}.$$ **[1.0]**

Записваме II принцип на механиката за направление, перпендикулярно на пръчката:

(8) $$ma_\tau = G\cos\alpha - N,$$ **[0.5]**

и намираме силата на нормална реакция на масата:

(9) $$N = mg\cos\alpha - ma_\tau = \left(\frac{\ell^2}{\ell^2 + 12x^2}\right)mg\cos\alpha.$$ **[0.5]**

Докато пръчката се върти около ръба на масата, е изпълнено: $f \le \mu N$, т.е:

(10) $$(\ell^2 + 36x^2)\sin\alpha \le \mu\ell^2\cos\alpha$$ **[0.5]**

Знакът за равенство съответства на момента, в който пръчката започва да се хлъзга, т.е. когато $\alpha = \alpha_{\max}$. Оттук намираме:

(11) $$\alpha_{\max} = \operatorname{atan}\left(\frac{\mu\ell^2}{\ell^2 + 36x^2}\right) \approx 20^0.$$ **[1.0]**

Задача 2. Ядрен магнитен резонанс

а) Моларната маса на захарозата е:

(1) $\mu = 12 \times 12\,\mathrm{g/mol} + 22 \times 1\,\mathrm{g/mol} + 11 \times 16\,\mathrm{g/mol} = 342\,\mathrm{g/mol}.$

Следователно кристалчето съдържа количество вещество

(2) $$n = \frac{m}{\mu} = \frac{1.0 \times 10^{-3}\,\mathrm{g}}{342\,\mathrm{g/mol}} \approx 2.92 \times 10^{-6}\,\mathrm{mol}$$

и съответно:

(3) $$N = nN_\mathrm{A} \approx 1.76 \times 10^{18}$$

молекули захароза. Понеже една молекула захароза съдържа 22 атома водород, общият брой атоми водород (и съответно протони) е:

(4) $$N_\mathrm{H} = 22N \approx 3.87 \times 10^{19}.$$ **[1.0]**

Тъй като магнитният момент на всички протони е в една посока, общият магнитен момент на кристалчето е:

(5) $$M = N_\mathrm{H} p_\mathrm{m} = \frac{22 m p_\mathrm{m} N_\mathrm{A}}{\mu} \approx 5.42 \times 10^{-7}\,\mathrm{A.m},$$ **[0.5]**

а общият момент на импулса (общият спин):

(6) $$L = N_\mathrm{H} S = \frac{11 m N_\mathrm{A} \hbar}{\mu} \approx 2.03 \times 10^{-15}\,\mathrm{kg.m^2/s},$$ **[0.5]**

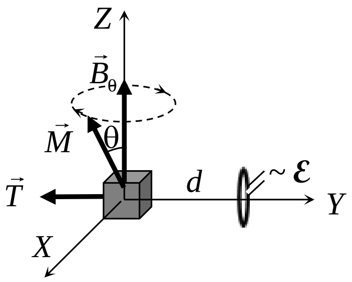
б) Върху магнитен дипол, поставен в магнитно поле, действа въртящ момент:

(7) $$\vec{T} = \vec{M} \times \vec{B}_0 = (M \sin\theta\,\hat{x} + M\cos\theta\,\hat{z}) \times B_0\hat{z} = -MB_0 \sin\theta\,\hat{y},$$ **[0.5]**

защото $\hat{z} \times \hat{z} = 0$ и $\hat{x} \times \hat{z} = -\hat{y}$. Следователно големината на въртящия момент е:

(8) $T = MB_0 \sin\theta \approx 1.36 \times 10^{-6}\,\mathrm{N.m}.$ **[0.5]**

Посоката на $\vec{T}$ е в отрицателната посока на оста *Y*. **[0.5]**



в) Скоростта, с която се променя моментът на импулса на кристалчето, е:

(9) $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{T}.$$ **[0.5]**

При прецесия векторът $\vec{L}$ се върти с постоянна ъглова скорост $\vec{\omega}$, успоредна на посоката на магнитното поле, т.е. по оста *Z*. Следователно:

(10) $$\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t} = \vec{\omega} \times \vec{L},$$ **[0.5]**

откъдето следва:

(11) $$\left|\frac{\mathrm{d}\vec{L}}{\mathrm{d}t}\right| = \omega L \sin\theta.$$ **[0.5]**

Като вземем предвид израза (5) за общия магнитен момент, (6) за общия момент на импулса и (8) за големината на въртящия момент, получаваме уравнението:

(12) $$\frac{11 m N_\mathrm{A} \hbar \sin\theta}{\mu}\omega = \frac{22 m p_\mathrm{m} N_\mathrm{A} B_0 \sin\theta}{\mu},$$ **[0.5]**

откъдето намираме кръговата честотата на прецесия:

(13) $$\omega = \frac{2 p_\mathrm{m} B_0}{\hbar} \approx 1.33 \times 10^{9}\,\mathrm{rad/s},$$ **[1.0]**

г) При прецесията на магнитния момент, се променят неговите компоненти по *X* и *Y*. Магнитното поле, дължащо се на *X* компонентата на магнитния момент, не води до магнитен поток през намотката. **[0.5]**

Следователно индуцираното в намотката ЕДН се дължи единствено на променливата *Y* компонента:

(14) $$M_y(t) = -M\sin\theta\sin(\omega t),$$ **[0.5]**

която създава в центъра на навивката променливо магнитно поле с индукция:

(15) $$B_y(t) = \frac{\mu_0 M_y(t)}{2\pi d^3} = -\frac{\mu_0 M\sin\theta\sin(\omega t)}{2\pi d^3}.$$ **[0.5]**

Понеже намотката е с малки размери, можем да приемем, че полето през напречното ѝ сечение е практически еднородно. Следователно магнитният поток през намотката е:

(16) $$\Phi(t) = B_y(t)A = -\frac{\mu_0 MA\sin\theta\sin(\omega t)}{2\pi d^3}.$$ **[0.5]**

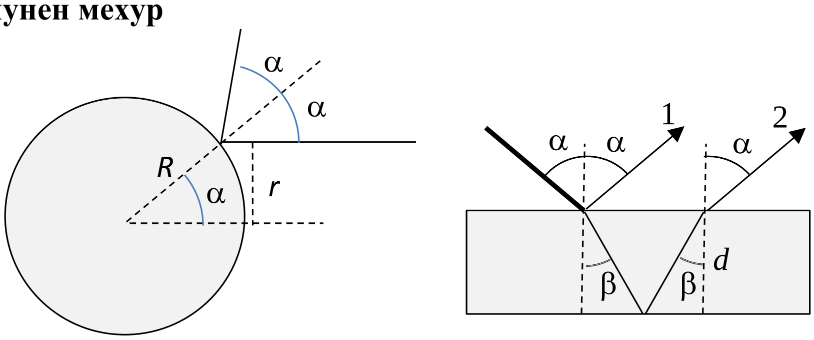
Съгласно със закона на Фарадей, в намотката се индуцира променливо напрежение:

(17) $$\mathcal{E}(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mu_0 MA\omega\sin\theta\cos(\omega t)}{2\pi d^3}.$$ **[0.5]**

Следователно ефективната стойност на напрежението в намотката е:

(18) $$\mathcal{E}_{\text{eff}} = \frac{\mathcal{E}_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}\mu_0\omega MA\sin\theta}{4\pi d^3} \approx 4.1\times10^{-5}\text{V}.$$ **[1.0]**

Задача 3. Сапунен мехур



Тъй като фотоапаратът е на голямо разстояние от мехура, във фотоапарата попадат практически успоредни лъчи. От фигурата вляво се вижда, че тъмен или светъл пръстен с радиус r съответства на лъчи, падащи върху мехура под ъгъл α, такъв че:

(1) $$\sin\alpha = \frac{r}{R},$$ **[0.25]**

където R е радиусът на мехура. Светлите (тъмните) пръстени се дължат на конструктивна (деструктивна) интерференция между светлинни вълни, отразени съответно от външната и от вътрешната повърхност на сапунената ципа. Тъй като дебелината на ципата е много малка, може да приемем, че интерфериращите вълни се отразяват от плоскопаралелна пластина. От закона на Снелиус следва, че ъгълът β на пречупване в ципата е такъв, че:

(2) $$\sin\beta = \frac{\sin\alpha}{n},$$ **[0.25]**

От фигурата вдясно се вижда, че оптичният път на вълната 1, отрезена от външната повърхност е:

(3) $$s_1 = \frac{\lambda}{2} + 2d\sin\alpha\tan\beta = \frac{\lambda}{2} + \frac{2d\sin^2\alpha}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}},$$ **[1.0]**

като сме взели предвид, че вълната се отразява от оптически по-плътна среда. Вълната 2 изминава в ципата оптичен път:

(4) $$s_2 = \frac{2dn}{\cos\beta} = \frac{2dn^2}{\sqrt{n^2-\sin^2\alpha}}.$$ **[1.0]**

От условието за интерференчен максимум:

(5) $$s_2 - s_1 = k\lambda$$

и израза (1) за $\sin\alpha$ получаваме за радиуса на светлите пръстени:

(6) $$2d\sqrt{n^2 - r^2/R^2} = k\lambda + \lambda/2 \quad (k = 0, 1, 2, ..).$$ **[0.5]**

За радиуса на тъмните пръстени съответно имаме:

(7) $$2d\sqrt{n^2 - r^2/R^2} = k\lambda \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$ **[0.5]**

От получените формули следва, че на пръстените с по-голям радиус съответства максимум (минимум) от по-малък порядък. Затова номерираме пръстените с целочислен индекс m = 1, 2, … от най-външния светъл (тъмен) пръстен към центъра, като индексът m в общия случай не съвпада с порядъка k на максимума (минимума). Затова условията (6) и (7) може да бъдат записани с едно уравнение:

(8) $$\sqrt{n^2 - r^2/R^2} = m\frac{\lambda}{2a} + C,$$ **[0.5]**

където стойността на константата C зависи от това дали става въпрос за максимум или за минимум. От тук се вижда, че ако въведем променливи:

(9) $$x \equiv m \text{ и } y \equiv \sqrt{n^2 - r^2/R^2},$$ **[0.5]**

получаваме линейна зависимост:

(10) $$y = Ax + C,$$

където:

(11) $$A = \frac{\lambda}{2d}$$ **[0.5]**

е еднакъв за светлите и за тъмните пръстени коефициент на наклон на правата. За да определим A, а оттам и търсената дебелина d, измерваме с линийка диаметъра $2R$ на мехура и диаметрите $2r$ на светлите пръстени (в средата на пръстена). Резултатите са нанесени в таблица 1. След това пресмятаме съответните стойности на променливата y и също нанасяме стойностите в таблицата.

Таблица 1.

$2R$ = 5.1 cm		
$m = x$	$2r$ (cm)	y
1	4.9	0.95
2	4.4	1.04
3	3.8	1.13
4	3.1	1.21
5	2.0	1.29

За измерване на диаметъра на мехура – 0.25 точки

За измервания и пресмятания на всеки ред от таблицата – по 0.25 точки

От таблицата построяваме графика на y от x (т.е. от m) и прекарваме апроксимираща права по експерименталните точки.

За всяка правилно нанесена точка – 0.25
За надписи върху осите – общо 0.25
За поне 50% запълване на площта на координатната мрежа – 0.5

От правата определяме коефициент на наклона:

(12) $$A \approx 0.088$$ **[0.5]**

и намираме дебелината на ципата:

(13) $$d = \frac{\lambda}{2A} \approx 3.1 \times 10^3 \text{ nm} = 3.1\ \mu\text{m}.$$ **[1.0]**

Точкуването е същото, ако вместо светлите пръстени се измерват тъмните пръстени.