**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**
**НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ**

**XXIV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**
**http://astro-olymp.org**

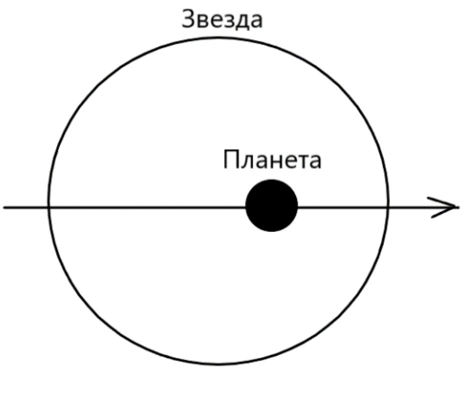
**III кръг, 7 май 2022 г.**

***Ученици от 9-10 клас – решения***

**1 задача. Планетата GJ 367b.** Звездата GJ 367 е червено джудже, намиращо се в съзвездието Голяма мечка и отдалечено на около 30 светлинни години от нас. Масата на червеното джудже е 0.454 слънчеви маси, а радиусът му е 0.457 слънчеви радиуса. Около него е открита планета, означавана като GJ 367b. Тя се движи около звездата по кръгова орбита с период 7.7 часа. Разстоянието между звездата и планетата е $1.085 \times 10^6$ km. Зрителният лъч от земния наблюдател лежи почти в орбиталната равнина на планетата.

- **А)** В приложението след условията на задачите ви е дадена крива на блясъка на звездата по време на пасаж (преминаване) на планетата пред диска на звездата. Направете необходимите измервания и определете радиуса на планетата.
- **Б)** Планетата не се наблюдава пряко. Но изключително точните спектрални наблюдения на звездата показват, че тя изпитва гравитационно влияние от страна на планетата. Звездата се движи около общия център на масите на системата звезда-планета. Разполагате също и с крива на изменението на лъчевата скорост на звездата. Използвайте тази крива и определете масата на планетата.
- **В)** Пресметнете средната плътност на планетата. Какво бихте предположили за нейния химически състав?

**Решение:**




Когато планетата преминава пред звездата, тя закрива част от нейния видим диск и блясъкът на звездата намалява. Означаваме с $R_0$ радиуса на звездата, а с $R$ радиуса на планетата. Ще приемем, че светлинният поток на единица площ, идващ от звездата към нас, е пропорционален на площта на видимия диск на звездата. Нека $I_0$ е светлинният поток, създаван от звездата, когато планетата не преминава пред нея, а $I$ светлинният поток от звездата по време на пасаж на планетата.

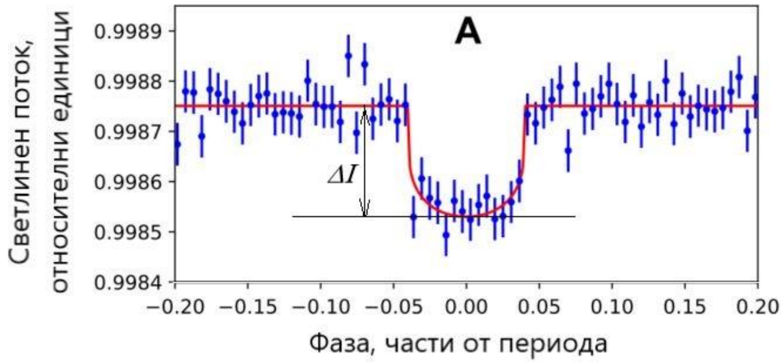
Тогава е в сила следното съотношение:

$$\frac{I}{I_0} = \frac{\pi {R_0}^2 - \pi R^2}{\pi {R_0}^2} = 1 - \left(\frac{R}{R_0}\right)^2$$

Оттук получаваме:

$$R = R_0\sqrt{\frac{I_0 - I}{I_0}} = R_0\sqrt{\frac{\Delta I}{I_0}} \qquad (1)$$

По вертикалната ос на кривата на блясъка на звездата е нанесен светлинният поток в относителни единици. Измерваме с линийка и определяме мащаба на оста – на 0.0005 относителни единици отговарят 41.7 mm. Хоризонталните участъци от кривата показват блясъка на звездата извън времето на пасажа на планетата, или светлинния поток $I_0$.




Измерваме разликата в светлинния поток от началото на координатната ос (0.9984 относителни единици) до нивото на хоризонталните участъци от кривата, използваме мащаба и получаваме:

$$I_0 = 0.9984\ \text{отн. единици} + 34\ \text{mm} \cdot \frac{0.0005\ \text{отн. единици}}{47.5\ \text{mm}} \approx 0.99876\ \text{отн. единици}$$

Измерваме по графиката намалението на потока от звездата $\Delta I = I_0 - I$ по време на пасажа и получаваме:

$$\Delta I = 20\ \text{mm} \cdot \frac{0.0005\ \text{отн. единици}}{47.5\ \text{mm}} \approx 0.00021\ \text{отн. единици}$$

Заместваме тези стойности във формула (1), използваме данните за радиуса на звездата и радиуса на Слънцето и получаваме радиуса на планетата:

$$R \approx 4\,600\ \text{km}$$

Тъй като зрителният лъч от земния наблюдател лежи почти в орбиталната равнина на планетата, можем да считаме, че максималната наблюдавана стойност на лъчевата скорост на звездата е равна на нейната орбитална скорост $v$ при движението ѝ около центъра на масите на системата. По графиката на лъчевата скорост определяме мащаба на вертикалната ос – на 5 m/s отговарят 57.5 mm. Измерваме двойната амплитуда на лъчевата скорост, която се равнява на $2v$ и получаваме:

$$2v = 18\ \text{mm} \cdot \frac{5\text{m/s}}{57.5\ \text{mm}}$$

$$v \approx 0.78\ \text{m/s}$$

Означаваме орбиталния период с $T$ и за радиуса $r_0$ на орбитата на звездата около общия център на масите можем да напишем:

$$vT = 2\pi r_0$$

Оттук намираме:

$$r_0 = \frac{vT}{2\pi} \approx 3450\ \text{m}$$

Дадено ни е разстоянието между звездата и планетата. Да означим това разстояние с $r$, а масите на звездата и планетата съответно с $M_0$ и $M$. Съгласно правилото на лоста е в сила равенството:

$$M_0 r_0 = M(r - r_0)$$

Оттук получаваме:

$$M = M_0 \cdot \frac{r_0}{r - r_0} \approx M_0 \cdot \frac{r_0}{r}$$

Като използваме данните за масата на звездата в слънчеви маси и масата на Слънцето, пресмятаме масата на планетата:

$$M \approx 2.9 \times 10^{24}\ \text{kg}$$

За средната плътност на планетата можем да напишем:

$$\rho = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} \approx 7 \times 10^3 \mathrm{kg/m^3}$$

Тази планета е по-плътна от Земята. Всъщност нейната средна плътност е сравнима с плътността на желязото. Предполага се, че тя е подобна на Меркурий – има обширно желязно ядро, покрито с относително тънък слой скално вещество. Поради това, че планетата е изключително близо до звездата се смята, че външните ѝ слоеве са били изпарени и ответи от лъчението на звездата.

*<u>Критерии за оценяване (общо 13 т.):</u>*
*А) За правилен теоретичен метод за определяне радиуса на планетата – 2 т.*
*За измервания и изчисления – 2 т.*
*За краен числен резултат – 1 т.*
*Б) За правилен теоретичен метод за определяне масата на планетата – 2 т.*
*За измервания и изчисления – 2 т.*
*За краен числен резултат – 1 т.*
*В) За пресмятане на средната плътност – 2 т.*
*За разсъждения относно състава на планетата – 1 т.*

**2 задача. Планета с две луни.** Гористата планета е обрасла с огромни дървета, подобни на нашите секвои. Жителите на планетата използват като единица мярка за разстояние височината на най-високото дърво. Ще наречем тази единица „секвоя“, понеже нейното име на местния език е непроизносимо за нас. Известно е, че радиусът на Гористата планета е равен на 30 000 секвои. Обитателите на планетата използват като единици за измерване на времето своите денонощия.

Около планетата обикалят две луни. Те се движат по кръгови орбити, лежащи в екваториалната равнина на планетата, в същата посока, в която става и околоосното въртене на планетата.

- **А)** Главният астроном на Гористата планета живее на малък остров в обширно езеро, за да не му пречат дърветата по време на наблюденията. Езерото е на екватора. Астрономът е установил, че времето от изгрева до залеза на Червената луна е равно на 1 денонощие, а от залеза до следващия изгрев – на 2 денонощия. Определете радиуса на орбитата на Червената луна в единици секвои.
- **Б)** Времето между два последователни изгрева на Синята луна е 1.125 денонощия. Определете радиуса на нейната орбита в единици секвои.

Разликата между слънчевото и звездното денонощие на Гористата планета е пренебрежимо малка.

**Решение:**

На схемата с точка A е означено положението на главния астроном на Гористата планета. При изгрева си Червената луна е в точка B′ от своята орбита, а при залеза си – в точка B″. Щом от изгрева до залеза на Червената луна изминава едно денонощие, а от залеза до изгрева – две денонощия, Червената луна се намира през една трета от времето над хоризонта за наблюдателя A и две трети от времето – под хоризонта. Това означава, че ъгълът B′OB″ е равен на 120°. Следователно ъгълът B′OA е равен на 60°, а ъгълът AB′O е равен на 30°. Оттук заключаваме, че радиусът на орбитата на Червената луна $r_1$ е два пъти по-голям от радиуса на планетата $R$. Така намираме:

$$r_1 = 2R = 60\,000 \text{ секвои}$$

Времето между два изгрева на Червената луна е $T_1{}' = 3$ денонощия, а между два изгрева на Синята луна е $T_2{}' = 1.125$ денонощия. Това обаче не са истинските орбитални периоди на двата спътника на Гористата планета. Те са свързани с въртенето на самата планета. Ако означим нейния период на околоосно въртене с $T_0 = 1$ денонощие, то за истинските орбитални периоди $T_1$ и $T_2$ на Червената и на Синята луна можем да напишем:

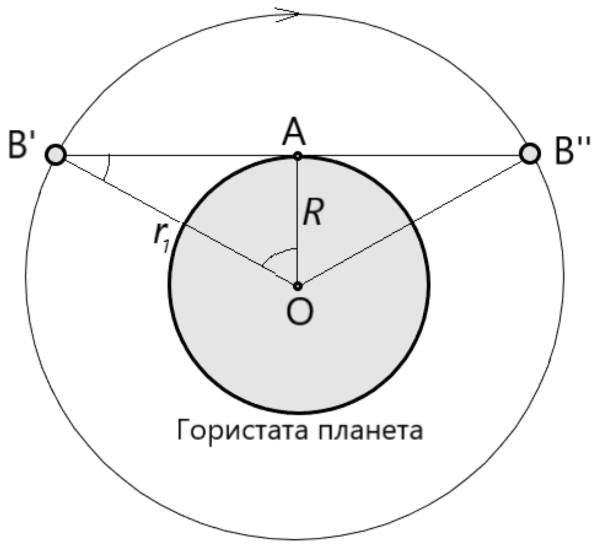
$$\frac{1}{T_1{}'} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_1}$$

$$\frac{1}{T_2{}'} = \frac{1}{T_0} - \frac{1}{T_2}$$

От тези равенства получаваме:

$$T_1 = \frac{T_1{}'\,T_0}{T_1{}' - T_0} = 1.5 \text{ денонощия}$$

$$T_2 = \frac{T_2{}'\,T_0}{T_2{}' - T_0} = 9 \text{ денонощия}$$




Сега вече, като знаем радиуса на орбитата на Червената луна, можем да намерим радиуса на орбитата на Синята луна $r_2$ чрез третия закон на Кеплер:

$$\frac{r_1{}^3}{T_1{}^2} = \frac{r_2{}^3}{T_2{}^2}$$

$$r_2 = r_1 \cdot \sqrt[3]{\frac{T_2{}^2}{T_1{}^2}} \approx 198\,000 \text{ секвои}$$

<u>*Критерии за оценяване (общо 12 т.):*</u>

*А) За верен начин за намиране на радиуса на орбитата на Червената луна – 4 т.*

*За числен отговор – 1 т.*

*Б) За разбирането, че трябва да се намерят истинските орбитални периоди на спътниците – 1 т.*

*За алгебрични преобразувания и пресмятания – 3 т.*

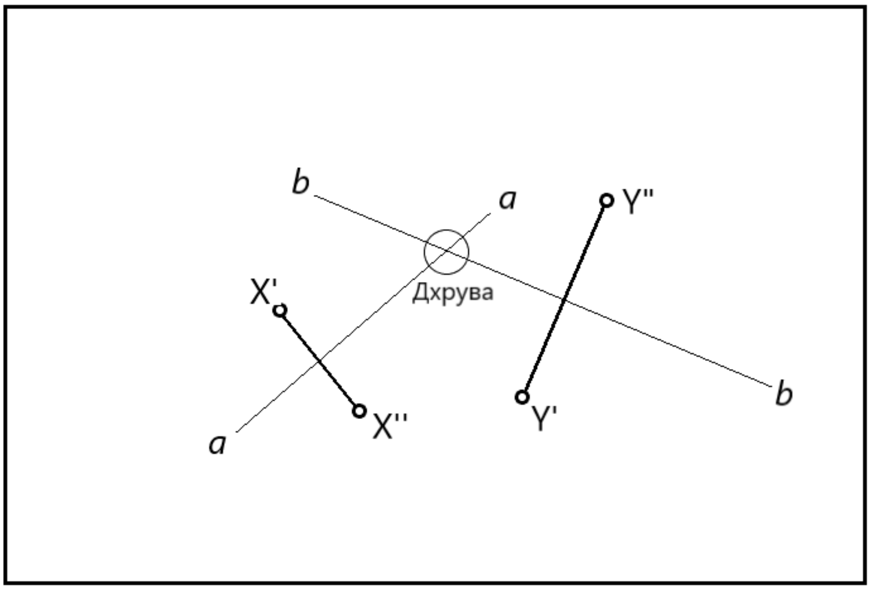
*За определяне на радиуса на орбитата на Синята луна – 3 т.*

**3 задача. Непоклатимият Дхрува.** В древни индийски ведически текстове се разказва за звездата Дхрува. Тя се уподобява на знаменит герой – аскетичен поклонник на бога Вишну, непоколебим в своята вяра. Дхрува е неговото прозвище, което означава „непоклатим“ или „неподвижен“. Звездата е наречена така в негова чест.

- **А)** В приложението след условията на задачите са ви дадени две звездни карти. На тях е представено звездното небе, както се е виждало от един индийски град в два момента от време в една нощ от онази древна епоха. Като използвате листа полупрозрачна хартия (паус), направете необходимите построения и измервания и определете коя е звездата Дхрува. Отбележете я на картите.
- **Б)** Дадена ви е също и карта с видимия път на северния небесен полюс в резултат от прецесията на земната ос. Определете по нея с точност до един век откога датират ведическите текстове, описващи звездата Дхрува.

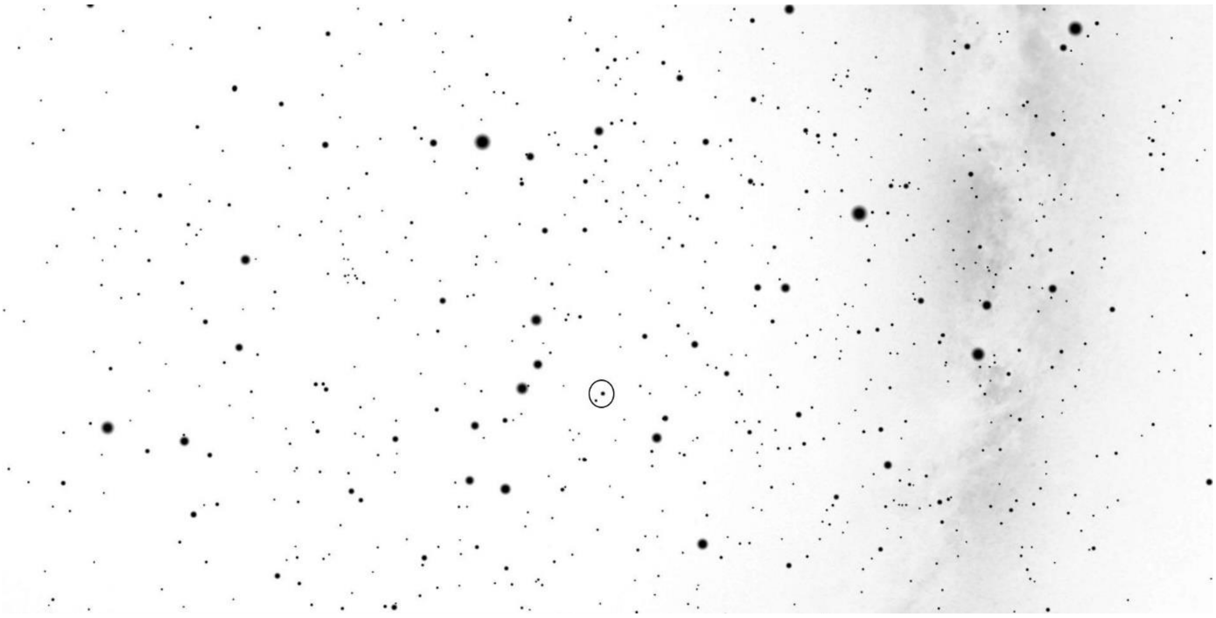
**Решение:**

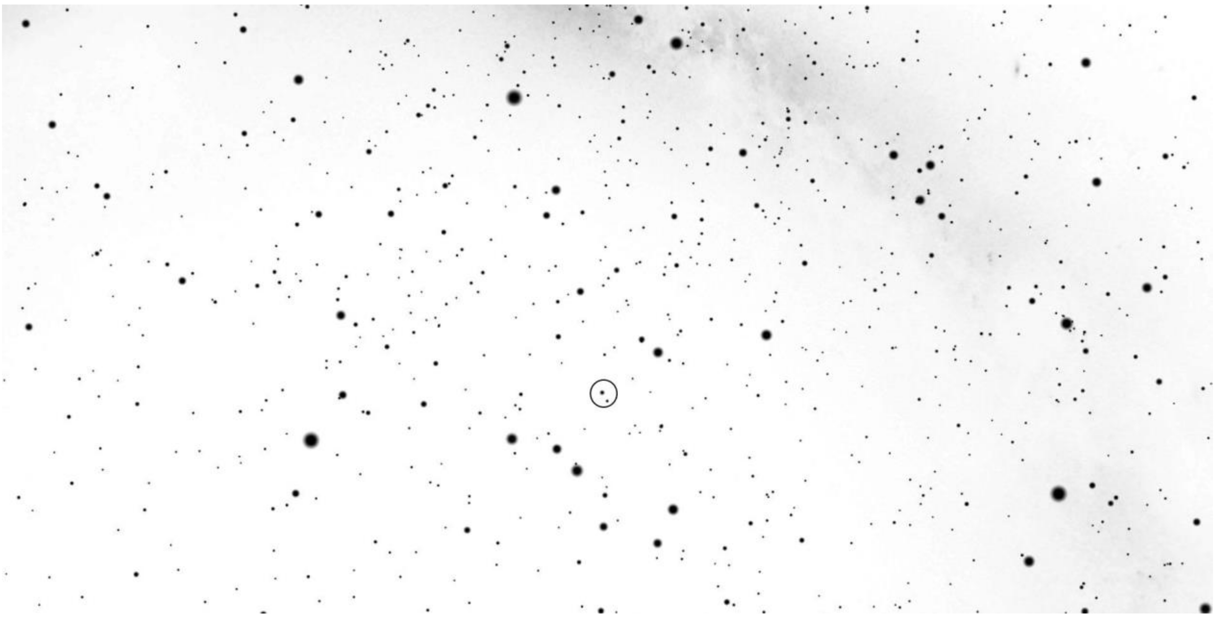
Прозвището на древния индийски герой ни подсказва, че звездата, наречена в негова чест, трябва да е играела ролята на полярна звезда в онази древна епоха – звезда, която при денонощното въртене на звездното небе остава неподвижна, като непоклатимия Дхрува. Двете изображения на звездното небе ни показват как са се изместили звездите при видимото денонощно въртене на небесната сфера. Поставяме листа полупрозрачна хартия така, че границите му да съвпаднат с изображението за момента 1. Виждаме, че конфигурациите на звездите в периферията на двете изображения на звездното небе доста се деформират, затова избираме звезди сравнително близо до центъра. Избираме две звезди и ги нанасяме на полупрозрачната хартия. Означаваме ги с X′ и Y′. След това слагаме по същия начин листа милиметрова хартия точно върху изображението на звездното небе за втория момент. Нанасяме новите положения на същите две звезди – X″ и Y″.




Върху полупрозрачната хартия начертаваме отсечките X′X″ и Y′Y″. Построяваме симетралите на двете отсечки – това са линиите *aa* и *bb*, които са перпендикулярни на отсечките и минават през средите им. Пресечната точка на двете симетрали трябва да е точката от небесната сфера, която остава неподвижна. Наслагваме полупрозрачната хартия върху едно от изображенията и виждаме, че пресечната точка от двете симетрали съвпада със звездата Тубан от съзвездието Дракон. Това е била древната индийска полярна звезда, или Дхрува.

Отбелязваме звездата върху картите.



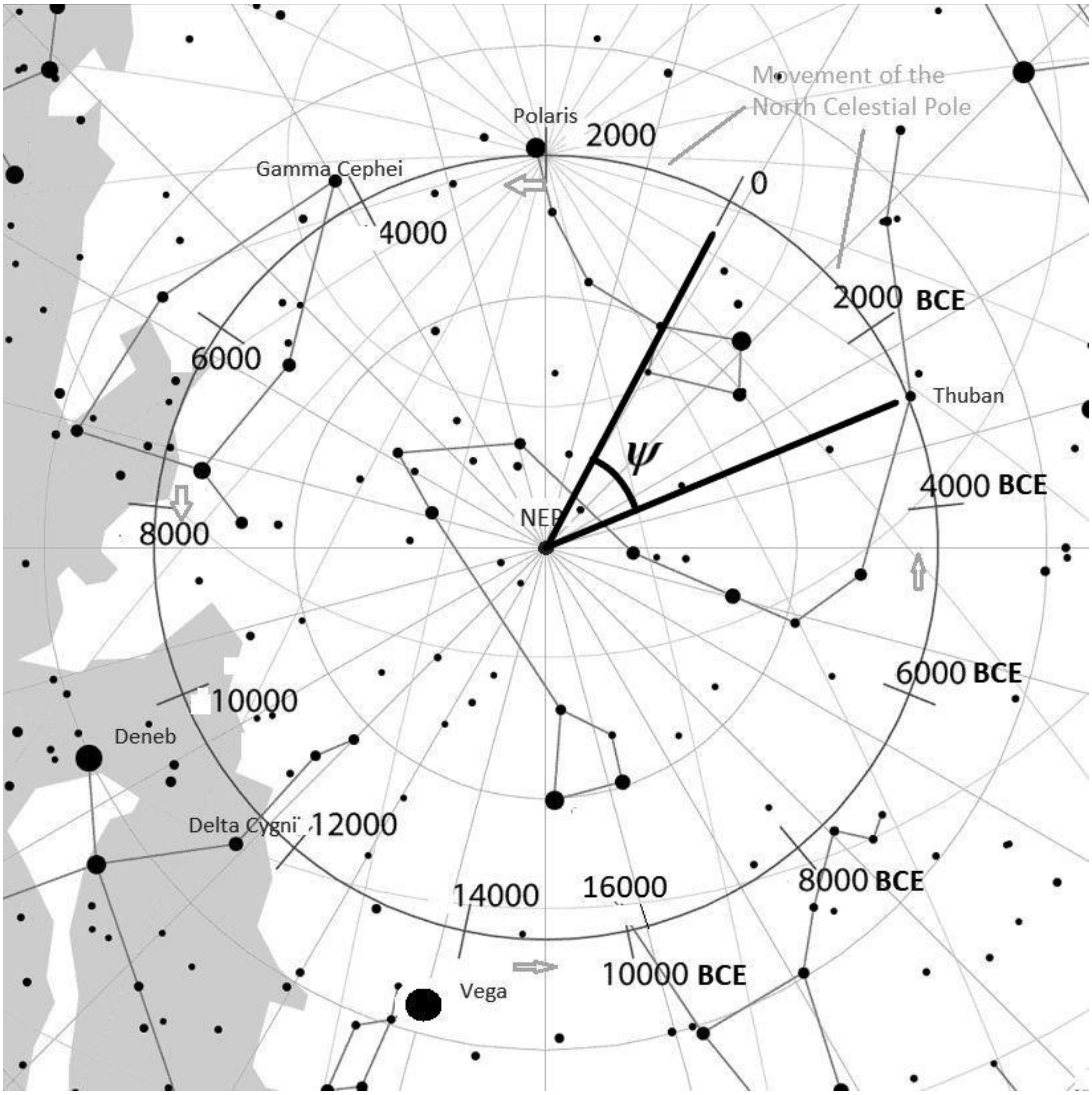


На фигурата, показваща движението на северния небесен полюс в резултат от прецесията на земната ос, измерваме ъгъла $\psi$, който съответства на дъгата, описана от северния небесен полюс от Тубан до днешната Полярна звезда. Този ъгъл е приблизително равен на 40°.

Периодът на прецесия на земната ос е 26 000 години. Следователно откакто Тубан (или Дхрува) е била полярна звезда до наши дни е изминало време:

$$t = \frac{40^\circ}{360^\circ} \cdot 26\,000 \approx 2890 \text{ години}$$

Това означава, че Дхрува е била Полярна звезда някъде през двадесет и деветото столетие преди новата ера.




*<u>Критерии за оценяване (общо 12 т.):</u>*

*А) За разбиране, че Дхрува трябва да е била полярна звезда – 1 т.*

*За правилен метод на намиране на неподвижната звезда – 2 т.*

*За добре направени геометрични построения – 2 т.*

*За идентифициране на звездата – 2 т.*

*Б) За правилен метод за определяне на епохата – 1 т.*

*За построения и измервания – 2 т.*

*За пресмятания и намиране на епохата – 2 т.*

**4 задача. Космически сблъсък.** През 1992 г. при сближаването на кометата P/Shoemaker-Levy 9 с Юпитер, нейното ядро беше разрушено от приливните сили на гигантската планета и се разпадна на множество отломъци. Впоследствие между 16 и 22 юли 1992 г. те се сблъскаха с Юпитер и това беше едно от най-впечатляващите астрономически зрелища, които сме наблюдавали някога.

- **А)** Нека приемем, че всеки отломък от кометното ядро се е движил по параболична орбита относно Юпитер. Нека върхът на параболата (точката на най-голямо сближаване с Юпитер) се намира на разстояние от центъра на Юпитер, равно на неговия радиус. Пресметнете скоростта на отломъка в тази точка в km/s. Сравнете тази скорост със скоростта на точка от екватора на планетата при нейното околоосно въртене. Съществен ли е ефектът от околоосното въртене на Юпитер за последствията от сблъсъците с кометните отломъци?

- **Б)** Фрагментите от кометното ядро, сблъскващи се с Юпитер, са имали диаметър от порядъка на 1 km. Кометните ядра имат средна плътност 500 $kg/m^3$. Пресметнете масата на един такъв фрагмент и кинетичната му енергия при сблъсъка с планетата.
- **В)** В резултат от сблъсъците в атмосферата на Юпитер се появиха огромни плътни облаци с размер от порядъка на 1000 km. Облаците на Юпитер имат дълбочина от порядъка на 20 km. С помощта на спектрални наблюдения е било определено, че температурата на образувалите се облаци е била от порядъка на 10 000°C. На височината на облаците атмосферата на Юпитер има средна плътност 3.6 $kg/m^3$, топлинен капацитет $1.2\times10^2$ J/(kg.K) и средна температура преди сблъсъка –100°C. Каква енергия е била нужна, за да се произведе нажеженият облак, наблюдаван след падането на даден кометен отломък в атмосферата на Юпитер? Сравнете тази енергия с кинетичната енергия на кометния отломък. Коя от двете енергии е по-голяма? Обяснете защо.
- **Г)** Съвременните ядрени оръжия произвеждат експлозии с енергии от порядъка на $4\times10^{15}$ J. Колко пъти по-мощни са експлозиите от падащите фрагменти на Юпитер в сравнение с това? Експлозията причинила масовото измиране на живите организми, включително и динозаврите, преди 65 милиона години е била предизвикана от астероид, който се е сблъскал със Земята и е имал кинетична енергия от порядъка на $4\times10^{23}$ J. Сравнете тази енергия с енергията при взривовете на кометните отломъци в атмосферата на Юпитер. Коя експлозия е била по-мощна и защо?

<u>**Решение (13т.):**</u>

**А)** Пълната енергия (гравитационна + кинетична) на параболично движещ се обект е 0. Тоест, можем да напишем уравнението за запазване на енергията:

$$\frac{v_{\text{периапсида}}^2}{2} = GM_J/R_J$$

където, $M_J$ е масата на Юпитер; :G е гравитационната константа; $R_J$ е радиусът на Юпитер. Скоростта на кометата в периапсидата е:

$$v_{\text{периапсида}} = sqrt\left(\frac{2GM_J}{R_J}\right) = 59.5\ km/s$$

Околоосното въртене на Юпитер има скорост $v_r$:

$$v_r = \frac{2\pi R_{\text{юпитер}}}{T_{\text{Юпитер ден}}} = 12.5\ \text{км/с}$$

Ефектът от въртенето на Юпитер е значителен (около 1/5 от скоростта на кометата). Въпреки това, ако съберем скоростите перпендикулярно, околоосното въртене допринася само 5% от тоталната енергия. Но ако приемем, че кометата има скорост паралелна на въртенето, тогава този ефект допринася близко 40% повече енергия в сблъсъка. За останалата част, приемаме, че въртенето не допринася значително за кинетичната енергия на сблъсъка. **(3т.)**

**Б)** Масата на фрагментите е (приемайки, че са кубове със страна от порядъка на 1 км, но приемайки, че са сфери е също толкова валидно решение):

$$M_{\text{комета}} = L^3 * \rho = (1000\ \text{м})^3 * 500\,\frac{\text{кг}}{\text{м}^3} = 5 * 10^{11}\text{кг}$$

Кинетичната енергия на сблъсъка е:

$$\text{E}_{\text{комета}} = \frac{\text{M}_{\text{комета}} * v_{\text{комета}}^2}{2} = 9 * 10^{21}\ J$$

**(3т.)**

**В)** Масата на нажежените облаци е:

$$\mathrm{M}_{\text{облак}} = \rho * L^2 * h = 0.36\frac{kg}{m^3} * 10^6 m * 10^6 m * 2 * 10^4 m = 7.2 * 10^{15} kg$$

Топлинната енергия, която е нужна за нагряването на облак с тази маса е:

$$\mathrm{E}_{\text{топлинна}} = \mathrm{M}_{\text{облак}} * C_{\text{облак}} * \Delta\mathrm{T}_{\text{облак}} = 7.2 * 10^{15} kg * 10^4 K * 1.2 * \frac{10^2 J}{K.kg} = 8.64 * 10^{21} J$$

Да, двата резултата са съвместими. Малката разлика в числените резултати е поради неточността в определянето на размерите на нажежените газови облаци, тяхната плътност и изключително променлив топлинен капацитет. **(4т.)**

**Г)** Енергията на падащите кометни фрагменти върху Юпитер е от порядъка на 2 милиона ($2*10^6$!) пъти по-голяма. Това е значително по-голяма енергия от целия ядрен арсенал на нашата цивилизация. Енергията на астероидът, който е предизвикал 5-тото масово измиране е била около 40 пъти по-висока. Това е защото астероидът предизвикал това явление е бил значително по-голям и е имал много по-висока плътност. **(3т.)**

**Справочни данни:**

Радиус на Слънцето – 696 000 км

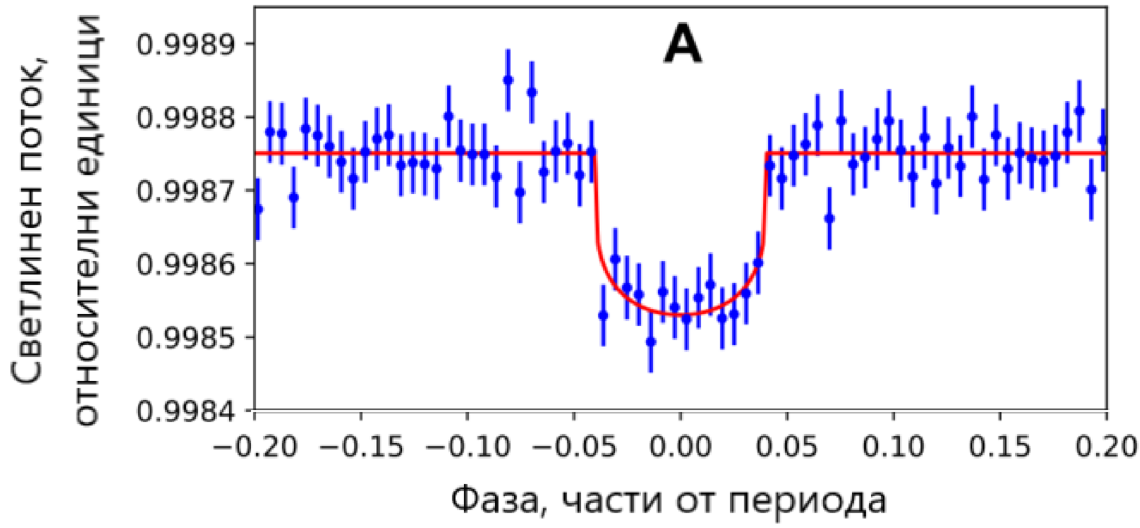
Маса на Слънцето – $2\times10^{30}$ kg

Маса на Юпитер – $1.9\times10^{27}$ kg;

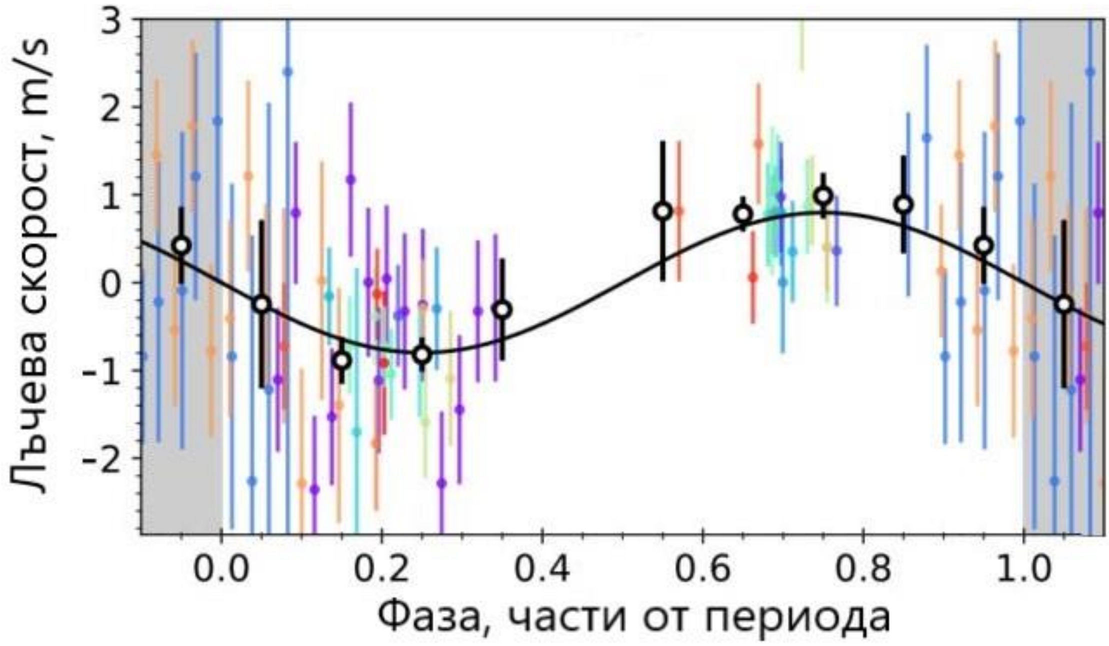
Радиус на Юпитер – 71500 km;

Период на въртене на Юпитер – 10 часа;

Гравитационна константа $6.67\times10^{-11}$ $m^3.kg^{-1}.s^{-2}$.

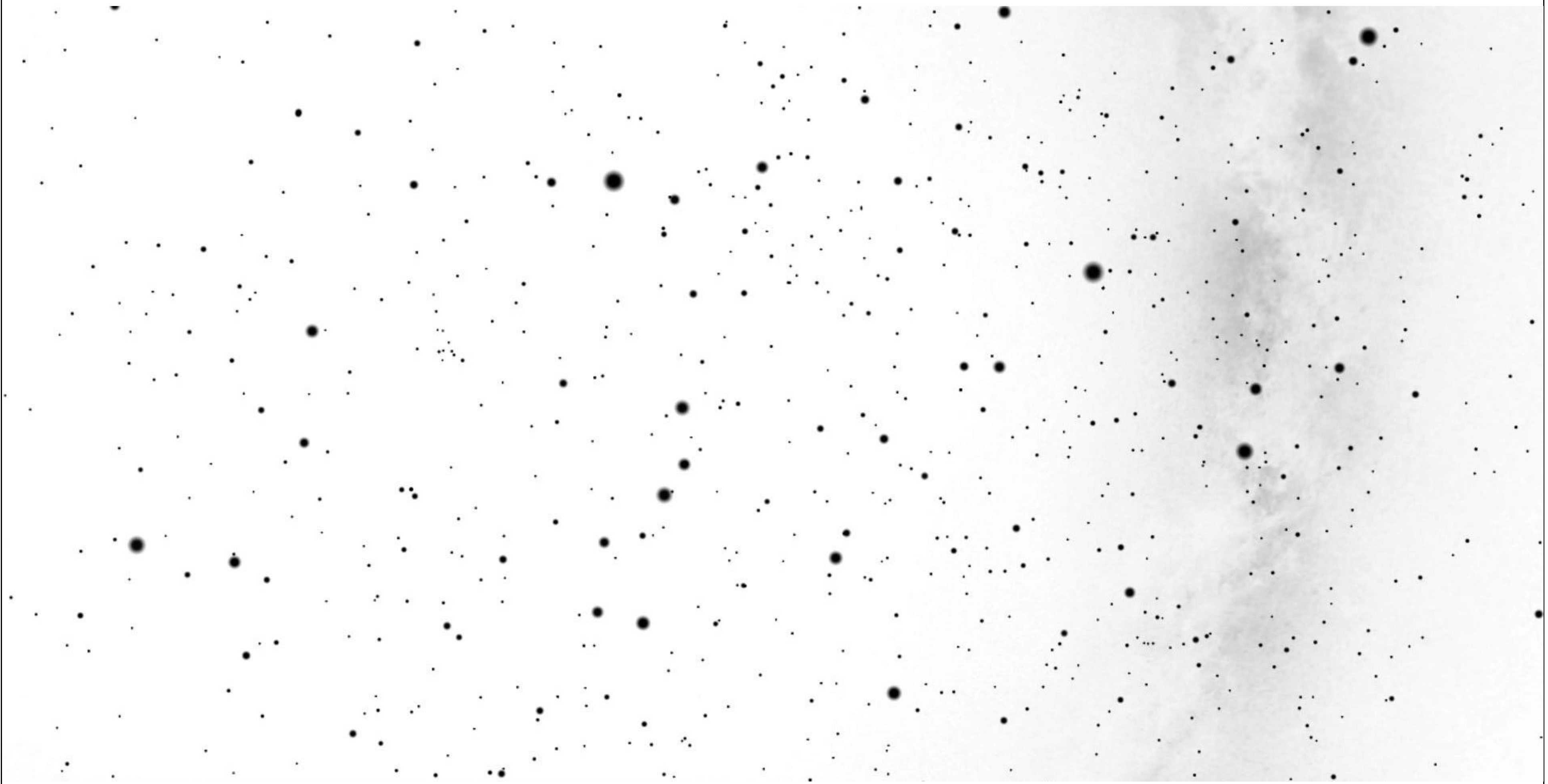



Крива на блясъка на звездата GJ 367 по време на пасаж на планетата.



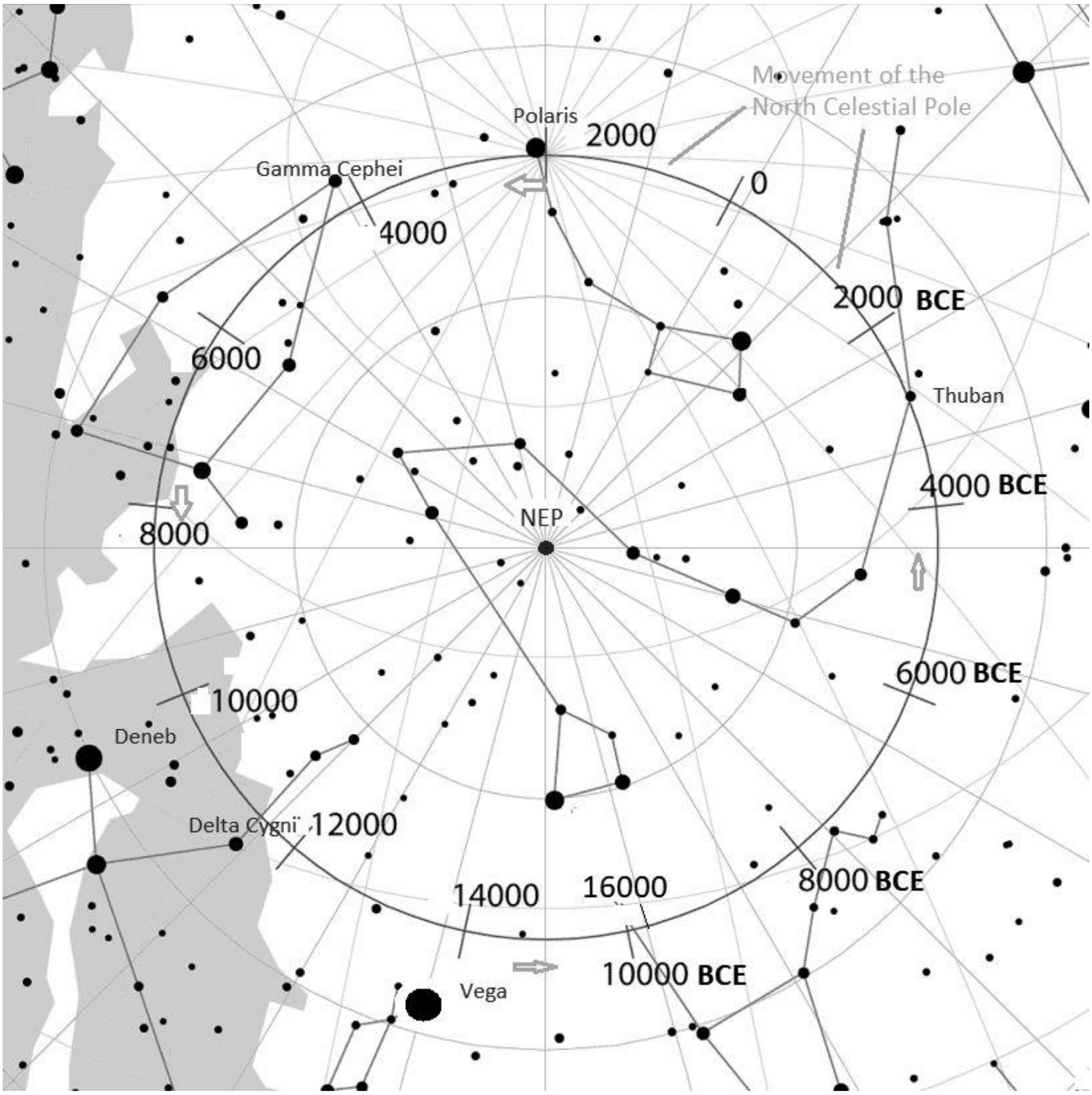

Крива на лъчевата скорост на звездата GJ 367.

***<u>Предайте този лист с вашите решения на задачите!</u>***



Звездното небе над един индийски град в древните времена на героя Дхрува – момент 1.
***<u>Предайте този лист с вашите решения на задачите!</u>***

Звездното небе над един индийски град в древните времена на героя Дхрува – момент 2.
***<u>Предайте този лист с вашите решения на задачите!</u>***




Пътят на северния небесен полюс в резултат на прецесията на земната ос.

***<u>Предайте този лист с вашите решения на задачите!</u>***