МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XXIV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ
http://astro-olymp.org

III кръг, 7 май 2022 г.

Ученици от 11-12 клас

1 задача. Извънземен сигнал. През 2032 г. по случай 70-тата годишнина от откриването на астрономическата обсерватория в град Димитровград, в двора на обсерваторията се монтира голям радиотелескоп. Скоро с него се улавя съобщение от извънземна цивилизация, живееща на непозната екзопланета.

- **А)** В съобщението се съдържат изображения на звездни карти. От тях кръжочниците в обсерваторията разбират, че за обитателите на северното полукълбо на планетата звездата Регул (с наши екваториални координати $\alpha = 10^h 09^m$, $\delta = 11°52'$) се използва като полярна звезда, а за жителите на южното полукълбо полярна звезда е Алнаир (с наши екваториални координати $\alpha = 22^h 09^m$, $\delta = -46°51'$). Нашето Слънце лежи на небесния екватор за тази планета. Определете приблизително разстоянието от нас до планетата. Разстоянието от нас до звездата Регул е 79.3 светлинни години, а до Алнаир – 101 светлинни години.
- **Б)** Да си представим друга планета, движеща се по кръгова орбита с радиус 0.05 au около някаква звезда. Звездата е червено джудже с радиус 0.15 части от слънчевия радиус и се намира на 40 светлинни години от нас. Нека отново полярната звезда за северното полукълбо на планетата е Регул, но не е известно къде е южният небесен полюс. Екваторът на планетата лежи в нейната орбитална равнина. Опишете приблизително областта от небесната сфера, в която може да се намира звездата, така че да наблюдаваме пасажи на планетата по нейния диск. Приемаме, че пасажът може да се забележи от момента, когато центърът на планетата пресича границата на видимия диск на звездата.
- **В)** А сега нека екваториалната равнина на планетата да сключва ъгъл 20° с равнината на нейната орбита около червеното джудже, но посоката на наклона е неизвестна. Как бихте описали областта от небесната сфера, в която може да се намира звездата, така че да има вероятност да се види пасаж на планетата?

Решение (12 т.):

Да означим с r_1 и r_2 разстоянията от нас до Регул и до Алнаир. Щом Регул е полярна звезда за жителите на северното полукълбо на планетата, а Алнаир – за жителите на южното полукълбо, то оста на планетата трябва да лежи върху правата, свързваща тези две звезди. А ако Слънцето лежи на небесния екватор, то посоката от планетата към него е перпендикулярна на тази права. Така определяме положението P на планетата в пространството.

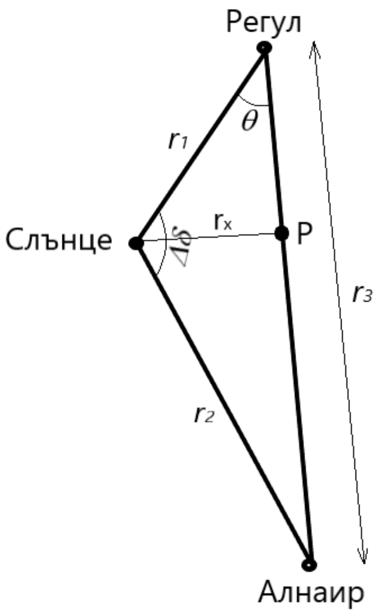
Означаваме с r_3 разстоянието между Регул и Алнаир, а с r_x търсеното разстояние от нас до планетата. Виждаме, че ректасцензиите на Регул и Алнаир се различават с 12^h. Това означава, че те лежат на два диаметрално противоположни небесни меридиани. Да означим с δ_1 и δ_2 деклинациите съответно на Регул и на Алтаир. За нас, земните наблюдатели, ъгловото разстояние между двете звезди ще бъде:

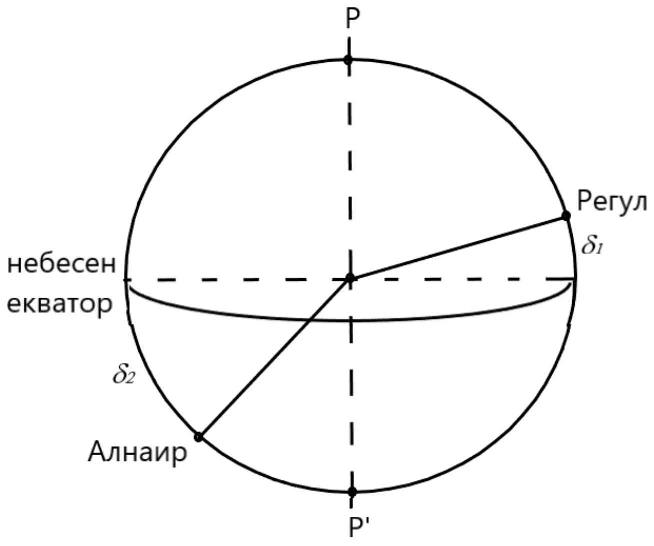
$$\Delta\delta = \delta_1 + 90° + (90° - \delta_1) = 145°$$

За триъгълника, съставен от Слънцето, Регул и Алтаир можем да приложим косинусовата теорема:

$$r_3{}^2 = r_1{}^2 + r_2{}^2 - 2r_1r_2\cos\Delta\delta$$

$$r_3 \approx 172.1 \text{ светлинни години}$$





След това прилагаме синусовата теорема, за да намерим $\sin\theta$:

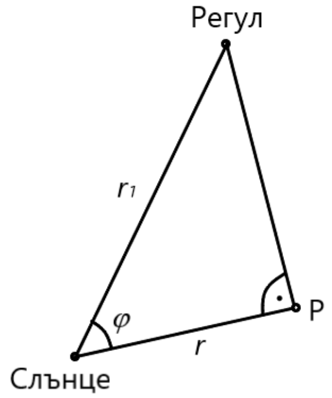
$$\frac{r_2}{\sin\theta} = \frac{r_3}{\sin\Delta\delta}$$

$$\sin\theta = \frac{r_2}{r_3}\sin\Delta\delta \approx 0.337$$

Накрая пресмятаме разстоянието от нас до планетата P:

$$r_x = r_1\sin\theta \approx 26.7 \text{ светлинни години}$$

Другата планета, разглеждана в задачата, е отдалечена от нас на разстояние $r = 40$ светлинни години. Нейната ос на въртене също е насочена към Регул. Равнината на нейния екватор съвпада с равнината на орбитата ѝ около нейната звезда. В такъв случай ние бихме виждали централни пасажи на планетата по диска на звездата, ако Слънцето се намира в същата тази равнина. Можем да намерим видимото ъглово разстояние от звездата до Регул:



$$\cos\varphi = \frac{r}{r_1}$$

$$\varphi \approx 59.7°$$

Не е известно къде е южният небесен полюс на тази планета. За да наблюдаваме централни пасажи по диска на звездата, тя трябва да отстои на ъгъл φ от Регул. Следователно звездата, около която обикаля планетата, трябва да лежи на една окръжност от небесната сфера с център звездата Регул и радиус 59.7°.

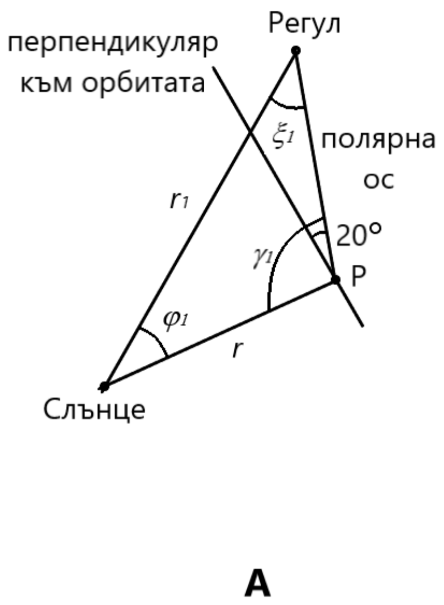
Нека R е радиусът на звездата, около която обикаля планетата, а z е радиусът на орбитата на планетата около нея. Означаваме с β ъгъла, който зрителният лъч от земния наблюдател сключва с орбиталната равнина на планетата при наблюдение на нецентрален пасаж. Ще намерим максималната стойност на този ъгъл, при която може да се наблюдава пасаж на планетата. Както се вижда от схемата:

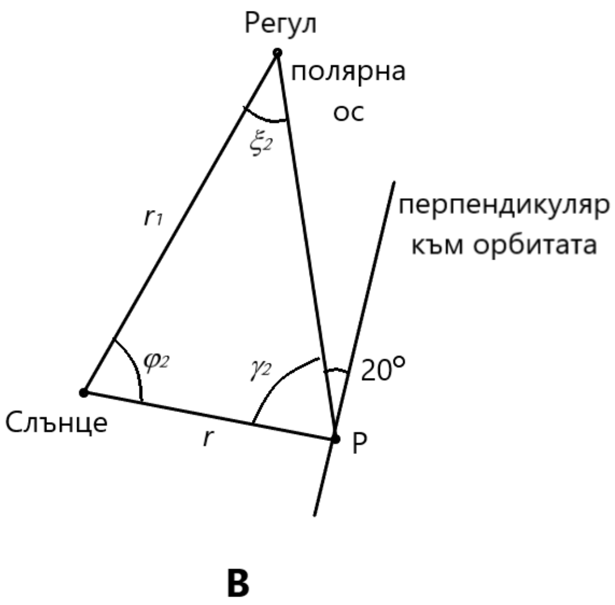
$$\sin\beta = \frac{R}{z}$$

$$\beta \approx 0.8°$$

Следователно, за да можем да наблюдаваме каквито и да било пасажи на тази планета, звездата, около която тя обикаля, трябва да се намира в ивица с ширина $2\beta = 1.6°$ и централна линия, представляваща окръжност с радиус $59.7°$ около звездата Регул.

Нека сега отново планетата да се намира на разстояние $r = 40$ светлинни години и отново оста ѝ да е насочена към Регул, но нейната екваториална равнина да сключва ъгъл $20°$ с равнината на орбитата ѝ. Ще разгледаме два гранични случая.





В двата случая оста на планетата, отбелязана на схемата като полярна ос, е насочена към звездата Регул. Зрителният лъч от Слънцето към планетата P лежи в нейната орбитална равнина и сключва прав ъгъл с перпендикуляра към тази равнина. От своя страна перпендикулярът към орбитата на планетата е наклонен на $20°$ към полярната ос. В ситуацията, означена на схемата с A:

$$\gamma_1 = 90° + 20° = 110°$$

В ситуацията B:

$$\gamma_2 = 90° - 20° = 70°$$

Прилагаме синусовата теорема и намираме:

$$\sin\xi_1 = \frac{r}{r_1}\sin\gamma_1$$

$$\sin\xi_2 = \frac{r}{r_1}\sin\gamma_2$$

Но тъй като $\sin\gamma_1 = \sin\gamma_2$, получаваме:

$$\xi_1 = \xi_2 = 28.3°$$

Накрая намираме ъгловите отстояния на звездата с планетата от Регул:

$$\varphi_1 = 180° - \gamma_1 - \xi_1 = 41.7°$$

$$\varphi_2 = 180° - \gamma_2 - \xi_2 = 81.7°$$

При наклон на оста на планетата към нейната орбита 20°, в зависимост от ориентацията на орбиталната равнина има вероятност да можем да наблюдаваме централни пасажи, ако звездата с планетата се намират в една пръстенообразна област от небесната сфера с център звездата Регул, вътрешен радиус 41.7° и външен радиус 81.7°. Разбира де, можем да разширим тази област още с по 0.8° около вътрешната и външната граница, ако допуснем да се наблюдават и нецентрални пасажи.

__Критерии за оценяване (общо 12 т.):__

А) За правилни разсъждения – 2 т.

За пресмятания и числен резултат – 2 т.

Б) За определяне на линията, в която трябва да се намира звездата, за да се наблюдават централни пасажи – 2 т.

За намиране на ширината на ивицата, в която могат да се виждат и нецентрални пасажи – 2 т.

В) За правилно разглеждане и пресмятания по двете ситуации – 3 т.

За правилно крайно описание на областта – 1 т.

2 задача. Поглед в миналото. Когато гледаме звездите, всъщност ги виждаме в миналото, тъй като е нужно време на светлината да измине разстоянието от тях до нас. Но дали звездите се променят осезаемо за това време?

В приложението след условията на задачите е дадена диаграма на Херцшпрунг-Ръсел с еволюционни трекове на звезди с различни маси (от 0.5 до 15 слънчеви маси). Близо до всяка означена точка е дадена възрастта на звездата в години, при която тя минава през тази точка,. Приемете, че между всеки две съседни обозначени точки звездите се движат равномерно по така нарисуваните трекове.

- **А)** Наблюдаваме с просто око звезда с 15 слънчеви маси. Тя изглежда синьо-бяла (спектрален клас B) и на възраст 11.1 милиона години. Каква е температурата на звездата, както я виждаме? Каква е минималната възможна действителна температура на звездата в същия този момент?
- **Б)** Представете си звезда с маса 15 слънчеви маси, която всъщност в момента е оранжева (спектрален клас K), въпреки че ние я наблюдаваме с телескоп синьо-бяла (спектрален клас B). Покажете, че не е възможно тази звезда да е в Млечния път. В кои галактики може да бъде тя (избройте две възможни галактики)?
- **В)** Звездата Каф (β Cas) има фотосферна температура 7080 K и радиус 3.5 слънчеви радиуса. Определете масата на Каф в слънчеви маси. Оценете възрастта на Каф.
- **Г)** Пресметнете приблизително скоростта на разширение, която ще достигне повърхността на Слънцето при превръщането му в червен гигант след около 6 милиарда години.

Решение (13 т.):

Диаграмата използва логаритмична скала и по двете оси. Оразмеряваме двете логаритмични скали като използваме:

$$y = \lg(L/L_S)$$

$$x = \log_{2.5}(T/10000\text{K}) = \frac{\lg(T/10000\text{K})}{\lg(2.5)} = \frac{\lg(T/10000\text{K})}{0.39794}$$

Тогава отбелязаните стойности по y-оста стават -2, 0, 2, 4 (от долу нагоре), а по x-оста: -1, 0, 1 (от дясно наляво). Между тях можем да интерполираме (x,y) координати по диаграмата линейно и после да превръщаме стойностите обратно в светимост и температура, използвайки:

$$\frac{L}{L_S} = 10^y$$

$$T[\text{K}] = 10000 \times 10^{0.39794x} = 10^{0.39794x+4}$$

А) Звезда с 15 слънчеви маси и на възраст 11.1 милиона години е на координати (x,y) = (0.34, 0.98), т.е. има T = 13650 K, L = 95500 L_S. Приемаме, че при максимална отдалеченост на звездата тя ще е от видима звездна величина 6.0. Абсолютната звездна величина оценяваме по закона на Погсън, сравнявайки с абсолютната звездна величина на Слънцето, +4.75:

$$M = 4.75 - 2.5\lg\left(\frac{L}{L_S}\right) = -7.70$$

Разстоянието, на която такава звезда ще има видима звездна величина m=6.0, намираме от:

$$m - M = 5\lg(r[\text{pc}]) - 5$$

Получаваме r = 5500 pc = 17900 ly, тоест звездата в момента е около 18 000 години по-възрастна. Интерполираме линейно между точките с възраст 11.1 и 11.9 Myr и получаваме отместване по x с 0.010, т.е. новата стойност на x ще бъде 0.34-0.01=0.33 и действителната температура на звездата ще бъде T = 13530 K, т.е. съвсем малко по-ниска.

При това решение пренебрегваме болометричната корекция. **(3т.)**

Б) Най-далечният край на диска на Млечния път е на разстояние около 120 000 ly, което светлината изминава за 0.012×10^7 yr. Спектрален клас K достига температура до около 5000 K, което съответства на възраст 12.0 Myr за 15 слънчеви маси. Спектрален клас B достига температура около 10 000 K (за свръхгиганти), която еволюционният трек за 15 слънчеви маси достига при възраст 11.7 Myr. Тоест, звезда с маса 15 слънчеви ще бъде спектрален клас K0 най-рано 300 000 години след като е била спектрален клас B9. Следователно, такава звезда, която наблюдаваме като B9, а в момента е K0, трябва да е на разстояние минимум 300 000 ly и не може да бъде в Млечния път.

Звездата може да бъде на разстояние 2-3 Mly, тъй като времето от излизането от Главната последователност до най-дясната дадена точка по трека е около 2-3 Mly. Следователно, звездата може да бъде в галактиките M31 и M33. Тъй като 15 слънчеви маси на Главната последователност са между класове O9 и B0, звездата може да бъде на разстояние до 12 Mly, т.е. и в близка галактика извън Местната група. **(3т.)**

В) По закона на Стефан-Болцман определяме светимостта на Каф:

$$\frac{L}{L_S} = \left(\frac{R}{R_S}\right)^2 \left(\frac{T}{T_S}\right)^4 = 27.7$$

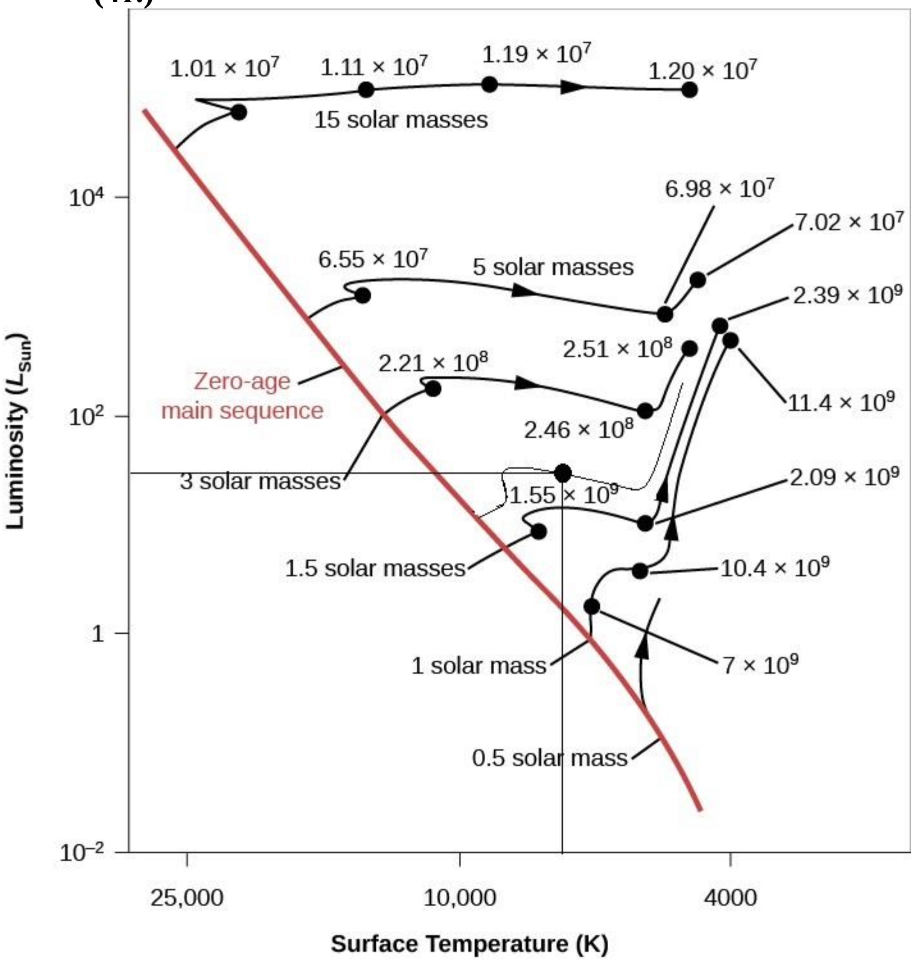
Логаритмуваме и намираме (x,y) положението на Каф по диаграмата:

$$(x,y) = (-0.38, 1.44)$$

Поставяме Каф на диаграмата. Ако интерполираме масата по най-малките разстояние до трековете 1.5 и 3 M_S, получаваме маса 1.95 M_S. Ако нарисуваме еволюционния трек и интерполираме масата по точката на отклонение от Главната последователност, получаваме 1.85 M_S. В професионалната литература масата на Каф е оценена на 1.91±0.02 M_S.

Добра оценка за възрастта може да се получи, ако интерполираме линейно логаритъм от възрастта между трековете за 1.5 и 3 M_S. За точките в основата на изкачването към червен гигант lg(t) е съответно 9.3 и 8.4. Линейна интерполация по графиката дава lg(t)=9.075 и възраст t = 1.2 Gyr. Професионалната литература дава стойности 1.1-1.2 Gyr.

(4т.)



Г) След време от 6 Gyr Слънцето ще бъде на възраст 4.6 + 6 = 10.6 Gyr. Използваме еволюционния трек за 1 слънчева маса между точките на възраст 10.4 и 11.4 Gyr. Те са на координати съответно (-0.67, 0.57) и (-1.00, 2.69).

На възраст 10.4 Gyr параметрите на Слънцето ще бъдат $T_1 = 5410$ K, $L_1 = 3.7\ L_S$.
На възраст 11.4 Gyr параметрите на Слънцето ще бъдат $T_2 = 4000$ K, $L_2 = 490\ L_S$.

По закона на Стефан-Болцман пресмятаме радиуси $R_1 = 2.2R_S$, $R_2 = 46.1R_S$. При линейна интерполация между двете можем да оценим съвсем грубо:

$$v = \frac{(R2 - R1)}{1\text{Gyr}} = 30\ \text{m/yr}$$

Това е средната скорост за целия интервал от 1 милиард години, но максималната скорост ще бъде по-висока. Приемайки, че Слънцето се движи равномерно по трека, можем да оценим скоростта на разширение на обвивката на възраст 11.4 Gyr. Темпът на промяна на y-координатата по диаграмата за тази част от трека ще бъде:

$$\frac{dy}{dt} = 2.12\ \mathrm{Gyr^{-1}}$$

Заместваме y със светимостта и:

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d(L/LS)}\frac{d(L/LS)}{dt} = 2.12\ \mathrm{Gyr^{-1}}$$

$$y = \lg\left(\frac{L}{L_S}\right) = \ln\left(\frac{L}{L_S}\right)/\ln(10)$$

$$\frac{dy}{d(L/L_S)} = \frac{1}{(L/L_S)\ln(10)}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{(L/L_S)\ln(10)}\frac{d(L/L_S)}{dt} = 2.12\ \mathrm{Gyr^{-1}}$$

$$\frac{d(L/L_S)}{dt} = 2.12\ \mathrm{Gyr^{-1}}(L/L_S)\ln(10) = 2400\ \mathrm{Gyr^{-1}}$$

Ако фиксираме температурата на 4000 K и диференцираме закона на Стефан-Болцман:

$$\frac{d(L/L_S)}{d(R/R_S)} = 2\left(\frac{T}{T_S}\right)^4\left(\frac{R}{R_S}\right)$$

$$\frac{d(L/L_S)}{dt} = 2\left(\frac{T}{T_S}\right)^4\left(\frac{R}{R_S}\right)\frac{d(R/R_S)}{dt}$$

$$\frac{d(R/R_S)}{dt} = \frac{1}{2\left(\frac{T}{T_S}\right)^4\left(\frac{R}{R_S}\right)}\frac{d(L/L_S)}{dt} = 112\ \mathrm{Gyr^{-1}}$$

$$\frac{d(R/R_S)}{dt} = 80\ \mathrm{m/yr}$$

Подобна оценка може да бъде извършена и числено с линейна интерполация между две точки нагоре по трека.

Отчитайки и охлаждането, можем да оценим скорост от порядъка на 100 m/yr или около 3μm/s. Забележете, че получената стойност е на много порядъци по-ниска от скоростта на разширение на планетарните мъглявини (~10^1 km/s). Планетарната мъглявина не се формира веднага след фазата на червен гигант, а много по-късно – след фазата на AGB звезда (звезда от асимптотичния клон на гигантите). Тоест, след фазата на червен гигант повърхността на Слънцето ще достига много по-високи скорости на разширение. **(3т.)**

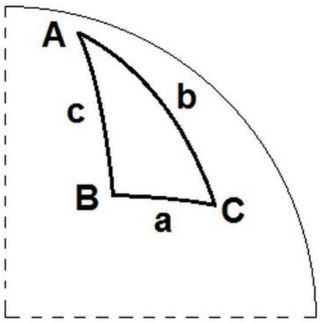
3 задача. **Промяна на орбитата.** Изстреляна е космическа обсерватория с маса 20 тона на кръгова орбита с височина 420 км. Орбитата сключва ъгъл с равнината на екватора $i_o = 50°$. След време се оказва, че някои от уредите на обсерваторията може да се използват за наблюдение на Земята. Затова е взето решение да се промени наклонът на орбитата така, че да може да се наблюдава цялата земна повърхност. При това не се променят другите параметри на орбитата.

- **А)** В кой момент корекцията на орбитата ще изисква по-малък единичен допълнителен импулс – когато обсерваторията преминава в най-близката до полюса точка от орбитата си или когато тя пресича равнината на земния екватор? Определете посоките и големините на импулсите, които следва да се предадат на апарата за да бъде извършена исканата смяна на орбитата.

- **Б)** Нека първоначалната орбита лежи в равнината на екватора и целта е обсерваторията да бъде прехвърлена на полярна орбита. Това може да стане с една корекция. Каква е посоката и големината на необходимия добавъчен импулс? Сравнете го с големината на допълнителния импулс, необходим за придобиване на втора космическа скорост.
- **В)** Възможно ли е преминаването към полярната орбита да стане по съществено по-икономичен начин, макар и с повече от една корекция на орбитата и с по-голям разход на време? Ако е възможно, то опишете метода и определете колко по-икономичен е той. Под „по-икономичен“ се има предвид „с по-малък сумарен (ако корекциите са повече от една) допълнителен импулс“.

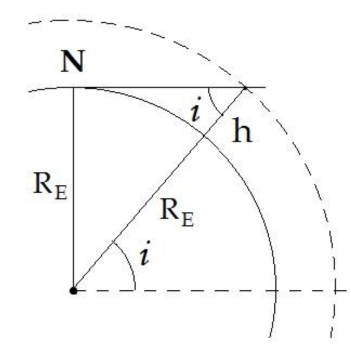
В сферичен триъгълник може да се формулира „синусова теорема“. Тя е същата както в триъгълник лежащ в равнина, но дължините на страните на триъгълника и неговите ъгли са дадени в еднакви ъглови единици.

$$\frac{sina}{sinA} = \frac{sinb}{sinB} = \frac{sinc}{sinC}$$



Не отчитайте влиянието на трети тела.

Решение (13т.): Първо трябва да определим наклона на новата орбита. За да се промени орбитата с минимален допълнителен импулс, новата орбита трябва да е с минимален наклон необходим за наблюдения на цялата повърхност на Земята. Този наклон се получава като изчислим къде равнина, допирателна към полюса, достига височината на орбитата на обсерваторията.



Очевидно е в сила равенството:

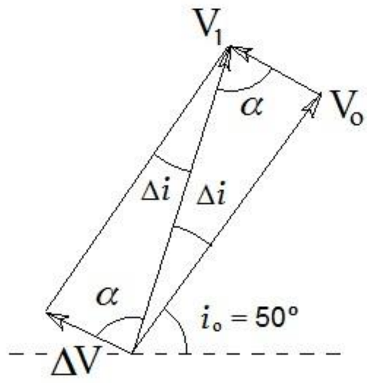
$$\frac{R_E}{R_E + h} = sin\boldsymbol{i}$$

Оттук следва:

$$\boldsymbol{i} = arcsin\frac{R_E}{R_E + h} = 69°.744 \approx 69°45'$$

Това е наклонът на орбитата, от която може да се наблюдава цялата земна повърхност.

Нека, първо, да разгледаме случая на орбитална корекция, когато обсерваторията пресича равнината на



земния екватор:

$$\Delta i = i - i_o = 19°.744 \approx 19°45'$$

Използваме косинусовата теорема:

$$\Delta V^2 = V_o{}^2 + V_1^2 - 2V_oV_1 cos\Delta i$$

Но векторите V_0 и V_1 са равни по абсолютна стойност, т.е. по големина. Те се различават само по посока. Нека означим абсолютната им стойност с V. Тогава:

$$\Delta V = V\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos\Delta i}$$

Скоростта V е всъщност кръговата скорост на височина h. Намираме я от формулата за кръгова скорост:

$$V = \sqrt{\frac{GM}{R+h}} = 7679.2\ m/s$$

Пресмятаме абсолютната стойност на корекцията към скоростта:

$$\Delta V = V\sqrt{2} \cdot \sqrt{1 - cos\Delta i} = 2634\ m/s$$

Добавъчният импулс е:

$p_1 = \Delta V \cdot m = 5.268 \cdot 10^7\ \ kg \cdot m/s$

Ъгълът на добавъчния импулс относно посоката на движение на обсерваторията е:

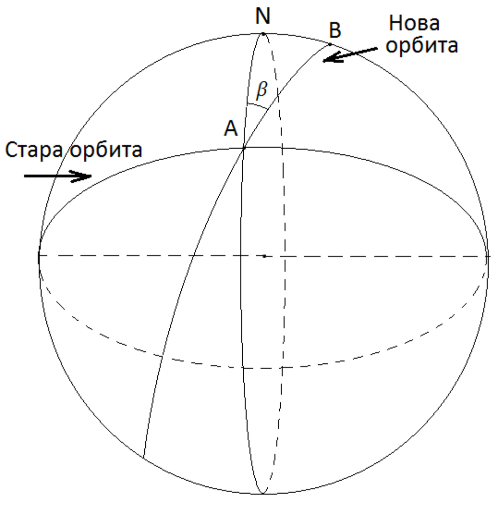
$$\alpha' = \alpha + \Delta i = 90° + \frac{1}{2}\Delta i = 90° + \frac{1}{2}(i - i_o) = 99°52'19".2$$

Нека корекцията се прави в най-близката до полюса точка. Там скоростта на апарата е успоредна на екватора и перпендикулярна към меридиана. За да определим на какъв ъгъл трябва да се промени посоката на движение на космическата обсерватория трябва да разгледаме правоъгълния сферичен триъгълник ограничен от дъгите, които свързват надполярната точка с най-северните точки на двете орбити и дъгата разположена между тях. (Всички дъги са части от големи кръгове). Дъгата AN = 90°− i_o, а дъгата BN = 90°− i . Прилагаме синусовата теорема за сферичния триъгълник NAB:

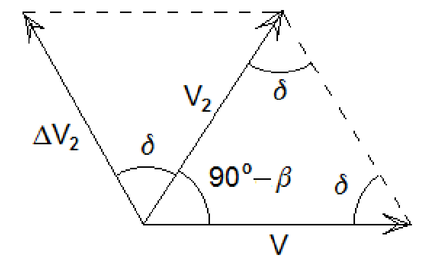
$$\frac{sin(90° - i)}{sin\beta} = \frac{sin(90° - i_o)}{sin90°} = sin(90° - i_o)$$

$$sin\beta = \frac{sin(90° - i)}{sin(90° - i_o)} = 0.5386$$

$$\beta = arcsin\, 0.5386 = 32°.59$$



При корекцията на орбитата се променя само посоката на скоростта, но не и нейната големина (абсолютна стойност).



$$\Delta V_2 = V\sqrt{2}\cdot\sqrt{1-cos(90°-\beta)} = 4308\, m/s$$

Добавъчният импулс е:

p_2=$\Delta V_2 \cdot m = 8.616\cdot 10^7\ \ kg\cdot m/s$

Виждаме, че той е съществено по-голям от необходимия импулс p_1, придаден в равнината на екватора. Причината е, че в този случай е необходимо да се промени посоката на движение на по-голям ъгъл. Следователно получихме, че $p_2 > p_1$.

Ъгълът на допълнителния импулс, относно моментната посока на движението на обсерваторията е:

$$\delta' = \delta + (90° - \beta) = \left[90° - \frac{1}{2}(90° - \beta)\right] + (90° - \beta)$$

$$\delta' = 90° + \frac{1}{2}(90° - \beta) = 118°.71 = 118°42'19.8"$$

Ако космическата обсерватория се движи в равнината на екватора, то за да тръгне тя по полярна орбита трябва да промени посоката на движение на 90°. Началната и крайната скорост ще са равни по големина, но ще сключват ъгъл 90°. Промяната на скоростта ще е хипотенузата в правоъгълен равнобедрен триъгълник и по-големина ще е по-голяма от скоростта на апарата с фактор $\sqrt{2}$. Следователно:

$$\Delta V_3 = V\sqrt{2} = 10860\, m/s$$

Ъгълът между моментния и коригиращия импулс очевидно е 135°.

Големината на добавения импулс ще бъде:

$$p_3 = 21.72\cdot 10^7\, kg\cdot m/s$$

В този случай ъгълът между началната и крайната скорост е най-голям и това води до най-големия необходим допълнителен импулс, за да бъде реализирата промяната на орбитата на космическата обсерватория.

За да премине на параболична орбита скоростта на обсерваторията трябва да достигне същата стойност:

$$V_{II} = \Delta V_3 = V\sqrt{2} = 10860\, m/s$$

Обаче, в този случай ъгълът е 0° и ние може да използваме изцяло орбиталната скорост на обсерваторията, която е равна на първа космическа скорост. Тогава добавката към скоростта ще бъде равна на разликата между втора и първа космическа скорост:

$$\Delta V_{II} = V_{II} - V_I = 10860 - 7679.2 = 3180.8\, m/s$$

Необходимият допълнителен импулс е:

$$p_{II} = 6.36\cdot 10^7 kg\cdot m/s < p_3$$

Нека сравним двата допълнителни импулса:

$$p_{II} = \frac{p_3}{3.415}$$

Виждаме, че импулсът необходим за достигане на параболична скорост е повече от 3 пъти по-малък от допълнителния импулс за директна промяна от екваториална към полярна орбита.

Предвид полученото по-горе може да си представим следната схема за корекция на орбитата. Първо се преминава на силно изтеглена елиптична орбита. Скороста в апогей ще много малка, примерно няколко десетки метра в секунда, и с много малък добавъчен импулс може да променим равнината на орбитата от екваториална на полярна.

С втори импулс, близък до p_{II} и придаден в перигея на орбитата, обсерваторията се връща на кръгова орбита около Земята, която вече ще е полярна орбита. Сумата от двата импулса ще е равна на удвоения импулс p_{II} и, както лесно се съобразява, той ще бъде по-малък от p_3 с фактор 2/3.415 = 0.586. Почти два пъти по-малък от директната едноимпулсна промяна на орбитата на космическата обсерватория.

Разбира се, тук сме пренебрегнали малките импулси в апогея на орбитата. Но и с тях сумарният импулс ще е съществено по-малък.

Критерии за оценяване (общо 13 т.):

За правилно определяне на новия наклон на орбитата – 1 т.

А) За правилно определяне на посоката и големината на добавъчния импулс на екватора и верен числен резултат – 3 т.

За правилно определяне на посоката и големината на добавъчния в най-северната точка на орбитата и верен числен резултат – 3 т.

Б)) За правилно определяне на посоката и големината на добавъчния импулс за преминаване от екваториална орбита към полярна и верен числен резултат – 2 т.

За намиране на добавъчния импулс за придобиване на втора космическа скорост – 1 т.

В) За правилни разсъждения относно по-икономичен начин за преминаване на полярна орбита чрез преминаване през силно ексцентрична орбита и числени пресмятания и сравнения – 3 т.

4 задача. Бели джуджета. Крайно нетърпелив астроном от град Бургас обича да изучава само космически обекти, при които се наблюдават възможно най-бързи промени. Любим предмет на неговите изследвания е двойната система ZTF J153932.16+502738.8, състояща се от две бели джуджета. Те се движат около общия си център на масите с рекордно краткия период от 6.91 минути. Орбиталната равнина на системата сключва ъгъл само 5.85° със зрителния лъч от Земята и системата се наблюдава като затъмнително двойна звезда. Ето някои данни за компонентите:

	Маса (в слънчеви маси)	Радиус (в слънчеви радиуси)	Температура
Компонента 1	0.610	1.562×10^{-2}	48 900 K
Компонента 2	0.210	3.140×10^{-2}	---

Температурата на втората компонента не е определена точно. Известно е само, че тя е много по-хладна от първата компонента.

- **А)** В приложението след условията на задачите са ви дадени кривите на лъчевите скорости на звездите. Направете необходимите измервания по тях и определете разстоянието между двете компоненти.
- **Б)** Използвайте данните от таблицата и определете дали от Земята се наблюдават пълни или частични затъмнения на двете компоненти. Обосновете вашето заключение чрез пресмятания и подходяща схема.
- **В)** Дадена ви е също и крива на блясъка на системата. Като имате предвид параметрите на звездите, обяснете защо участъците от кривата, които са между главните и вторичните минимуми, не са хоризонтални.
- **Г)** По кривата на блясъка бургаският астроном е определил отношението k на радиуса на първата компонента към радиуса на втората компонента. Като сравнил получения резултат с данните от таблицата, той бил твърде озадачен. Опитайте се и вие да повторите това изследване и дайте подходящо обяснение. Приемете, че малко преди вторичния минимум, когато до нас достига цялата светлина и от двете звезди, техният

сумарен блясък се равнява на 1 в условните единици на дадената скала на светлинния поток.

Решение (12т.):

А) Върху кривата на лъчевата скорост на главната компонента определяме мащаба по вертикалната ос – на 33.5 mm отговаря интервал от скорости 1000 km/s. Максималната лъчева скорост се равнява на линейната скорост v_A на това бяло джудже. Измерваме двойната амплитуда на лъчевата скорост, която се оказва 17.5 mm. По-нататък получаваме:

$$v_A = \frac{1}{2} \cdot \frac{17.5\ \text{mm}}{33.5\ \text{mm}} \cdot 1000\ \text{km/s}$$

$$v_A \approx 261.2\ \text{km/s}$$

По аналогичен начин за скоростта на вторичната компонента намираме:

$$v_B \approx 735.8\ \text{km/s}$$

Двете бели джуджета описват кръгови орбити около центъра на масите. Преминаваме в отправна система, неподвижно свързана с едното от тях, примерно с компонента 1. Другото бяло джудже ще се движи относно първото със скорост $v = v_A + v_B$ по кръгова орбита с радиус r, равен на разстоянието между двете компоненти. Ако означим орбиталния период на системата с T, можем да намерим това разстояние от равенството:

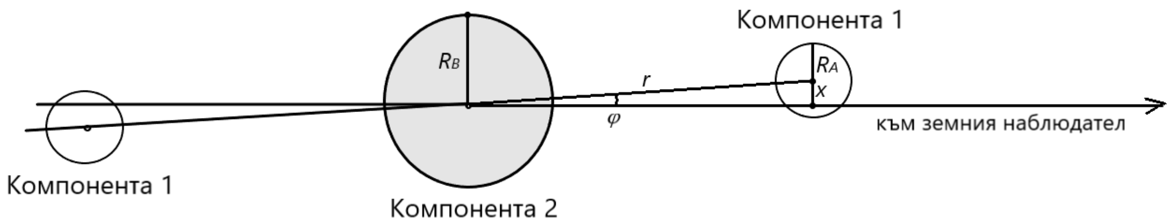
$$vT = 2\pi r$$

$$r = \frac{vT}{2\pi} \approx 65.8 \times 10^3\ \text{km}$$

Можем да вземем предвид и наклона на орбиталната равнина на двете бели джуджета към зрителния лъч от земния наблюдател и като умножим получената стойност на косинуса от този ъгъл, намираме още по-точна стойност:

$$r \approx 66.1 \times 10^3\ \text{km}$$

Б) Да означим с R_A и R_B радиусите на компонента 1 и компонента 2, а с φ ъгъла между орбиталната равнина на белите джуджета и зрителния лъч към земния наблюдател.



Както се вижда от схемата, при главен минимум по-голямата компонента 2 ще закрива напълно по-малката компонента 1 при главен минимум, а при вторичен минимум по-малката компонента 1 ще се оказва изцяло проектирана в рамките на видимия диск на компонента 2, ако е изпълнено условието:

$$R_A + x < R_B$$

Да определим разстоянието x:

$$x = r \sin\varphi$$

$$x \approx 6700\ \text{km}$$

От данните в таблицата и като използваме слънчевия диаметър в километри, получаваме:

$$R_A + x \approx 2.52\ \text{слънчеви радиуса}$$

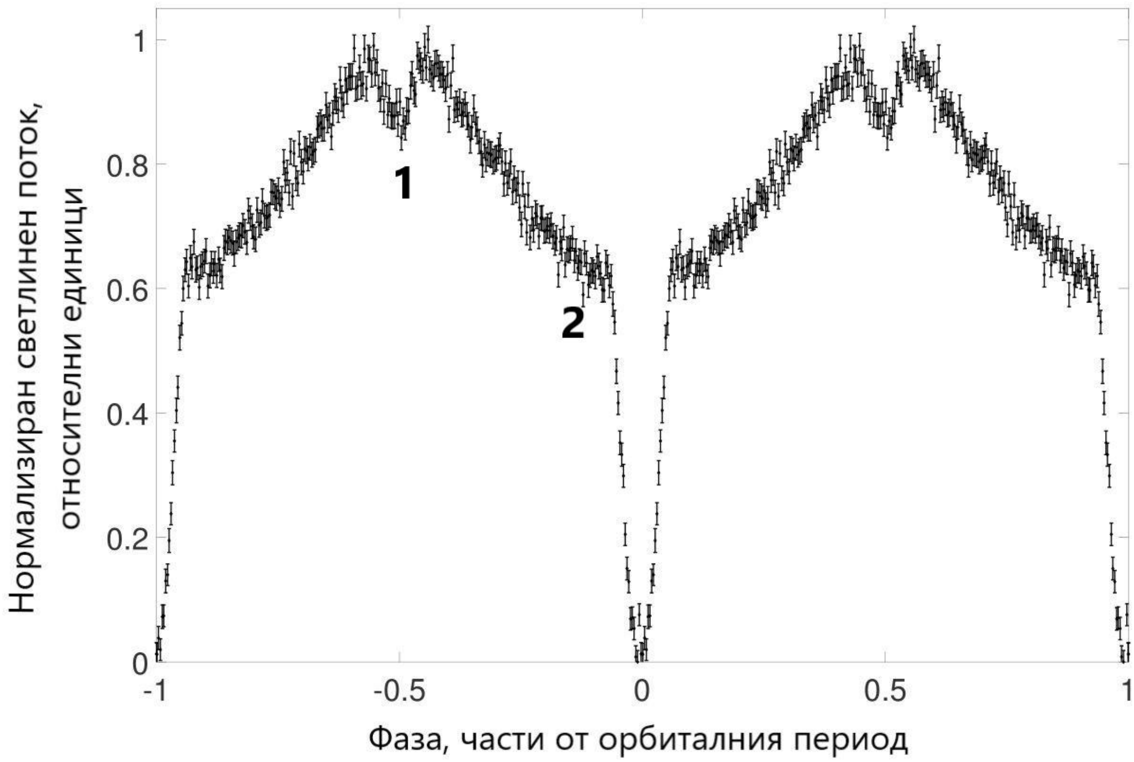
Очевидно неравенството е изпълнено и затъмненията са пълни.

В) Вторичните минимуми се получават, когато по-ярката по блясък компонента закрива по-слабата. В случая е известно, че по-ярката компонента 1 е значително по-гореща от компонента 2. Освен това двете бели джуджета са на извънредно малко разстояние едно от друго. Това означава, че по-хладното бяло джудже се огрява силно от по-горещото. Страната на по-хладното бяло джудже, която е обърната към горещото бяло джудже, е с по-висока температура и по-мощно излъчване, отколкото обратната страна. Главният минимум в кривата на блясъка отразява момента, когато към нас е обърната по-хладната и по-слабо излъчваща страна на вторичната компонента. Веднага след него обаче, при орбиталното движение на вторичната компонента, към земния наблюдател се оказва обърната все по-голяма част от нейната огрята страна и видимият ѝ блясък нараства – получава се ефект, подобен на смяната на фазата, както при Венера, например.

Г) По условие, в относителните единици, нанесени по вертикалната ос на графиката, сумарният блясък на компонента 1 и на „горещата“ страна на компонента 2 съответства на 1. Следователно стойността по вертикалната ос, измерена за който и да е момент от наблюдението, представлява отношението на общия блясък на двете джуджета в съответното взаимно разположение спрямо нас, към сумарния блясък на компонента 1 и на „горещата“ страна на компонента 2, изцяло обърната към нас. Нека означим това отношение с η и ще считаме, че именно то е нанесено по вертикалната ос на графиката.

Определяме мащаба на графиката и измерваме величината η за две точки, отбелязани с 1 и 2 на графиката. Получаваме:

$$\eta_1 \approx 0.875$$
$$\eta_2 \approx 0.634$$



Кривата на блясъка на двойната система е построена въз основа на данни от наблюдения в специфичен спектрален диапазон, обусловен от използвания филтър. Ще разглеждаме белите джуджета като равномерно светещи дискове. Да означим с I_A светлинния поток, създаван от единица площ от главната компонента 1, с I_B' светлинния поток, създаван от единица площ от компонентата 2, когато тя е обърната към нас със своята „гореща“ страна (огрятата от другото бяло джудже) и с I_B'' светлинния поток, създаван от единица площ от компонентата 2, когато тя е обърната към нас с „хладната“ си страна. Можем да напишем следните съотношения:

$$\frac{\left(\pi {R_B}^2 - \pi {R_A}^2\right) I_B{}' + \pi {R_A}^2 I_A}{\pi {R_A}^2 I_A + \pi {R_B}^2 I_B{}'} = \eta_1$$

$$\frac{\pi {R_A}^2 I_A + \pi {R_B}^2 I_B{}''}{\pi {R_A}^2 I_A + \pi {R_B}^2 I_B{}'} = \eta_2$$

В условието е казано, че температурата на компонента 2 е значително по-ниска от тази на компонента 1. При главен минимум ние виждаме практически само светлина от хладната страна на компонента 2, изцяло закриваща по-ярката, но по-малка компонента1. На графиката виждаме, че в такива моменти блясъкът на системата е съвсем незначителен. Следователно $I_B{}'' \ll I_A$ и можем да приемем приближението:

$$\eta_2 \approx \frac{\pi {R_A}^2 I_A{}'}{\pi {R_A}^2 I_A + \pi {R_B}^2 I_B{}'}$$

От тези равенства получаваме:

$$\frac{\left(\frac{{R_A}^2}{{R_B}^2} - 1\right) \cdot \frac{I_B{}'}{I_A} + 1}{1 + \frac{{R_A}^2}{{R_B}^2} \cdot \frac{I_B{}'}{I_A}} = \eta_1$$

$$\frac{1}{1 + \frac{{R_A}^2}{{R_B}^2} \cdot \frac{I_B{}'}{I_A}} = \eta_2$$

За краткост нека въведем означенията:

$$x = \frac{I_B{}'}{I_A}$$

$$y = \frac{{R_A}^2}{{R_B}^2}$$

Тогава горните равенства придобиват вида:

$$\frac{(y-1)x + 1}{1 + yx} = \eta_1$$

$$\frac{1}{1 + yx} = \eta_2$$

Изключваме от тях x и получаваме:

$$y = \frac{1 - \eta_2}{1 - \eta_1}$$

Търсената величина е:

$$k = \frac{R_A}{R_B} = \frac{1}{\sqrt{y}}$$

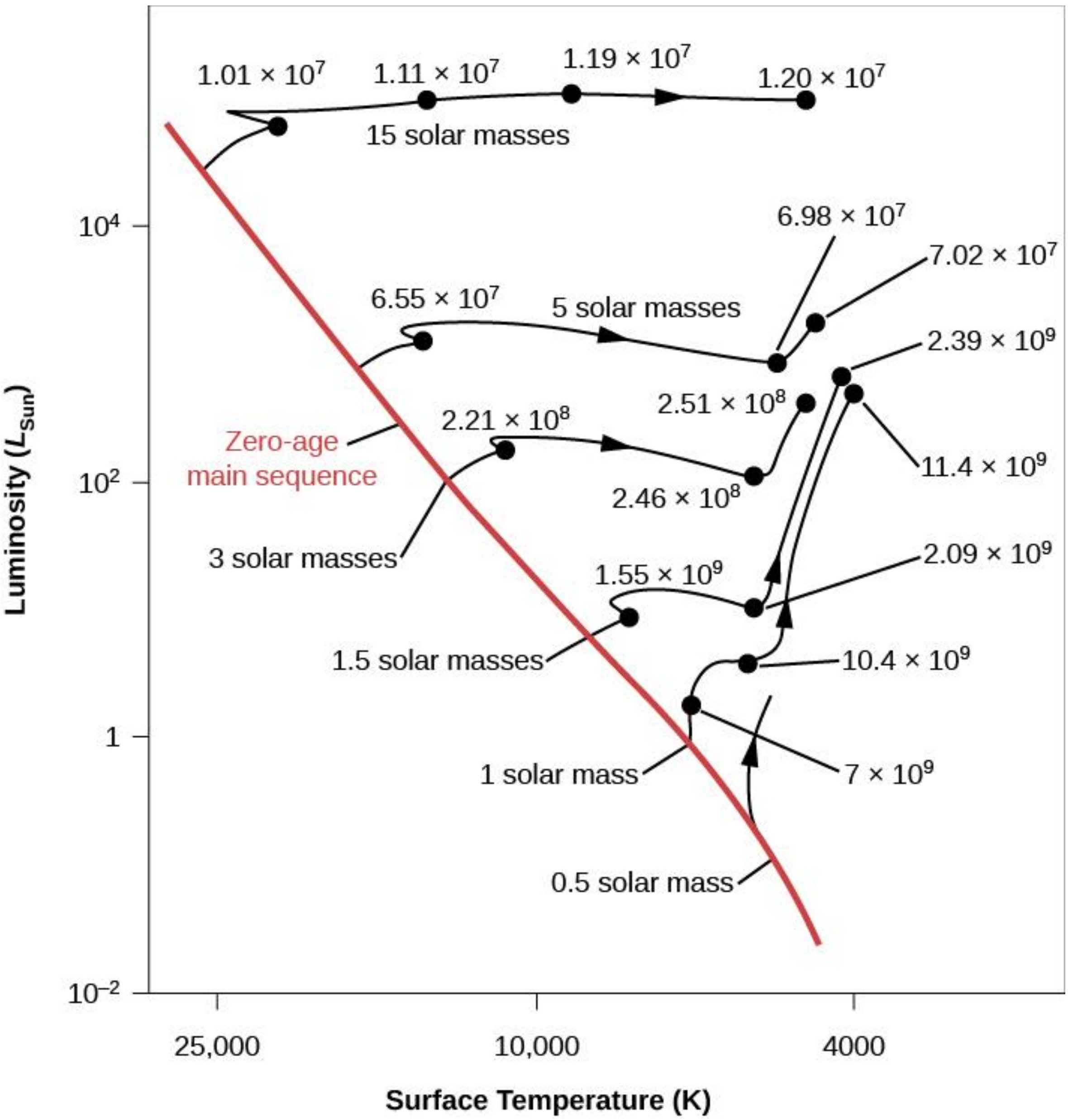
Заместваме числените стойности и получаваме:

$$k = \frac{R_A}{R_B} \approx 0.58$$

Даденото в таблицата отношение на радиусите на звездите е приблизително 0.5. Полученият от нас резултат означава, че ние леко надценяваме радиуса на по-малкото горещо бяло джудже при вторичния минимум. Обяснението може да се търси в това, че тогава по-малкото бяло джудже не закрива по-голяма площ от хладното бяло джудже, а закрива централната най-силно нагрята част от страната на хладното джудже, която е обърната към горещото джудже.

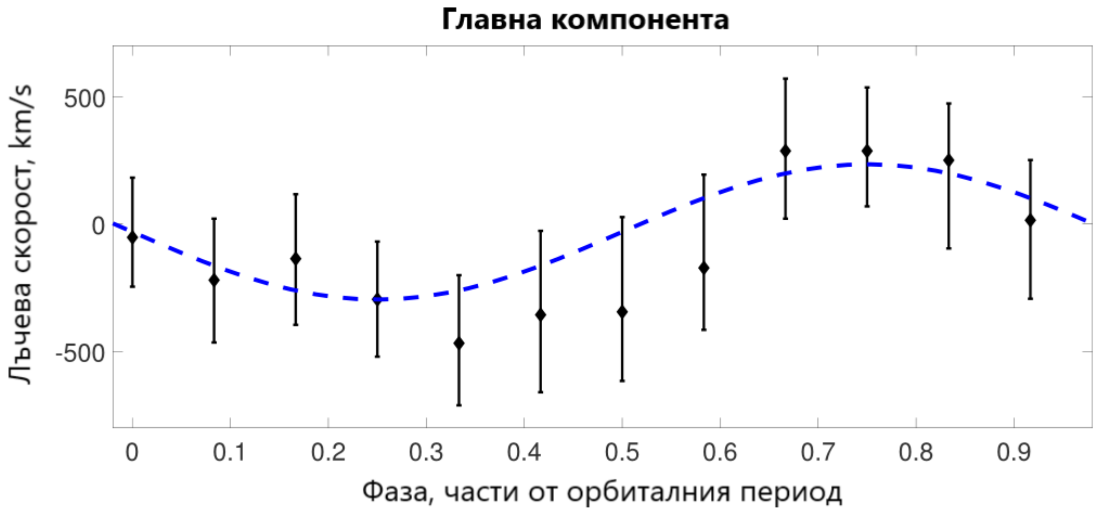
<u>Критерии за оценяване (общо 12 т.):</u>
А) За правилен метод за определяне на разстоянието – 1 т.
За измервания и изчисления – 1 т.
За краен числен резултат – 1 .
Б) За правилен теоретичен подход – 1.5 т.
За числени пресмятания и правилен извод – 1.5 т.
В) За правилно обяснение на вида на кривата – 2 т.
Г) За правилен теоретичен подход – 2 т.
За измервания и изчисления – 1 т.
За краен резултат и обяснение на несъответствието с табличните данни – 1 т.

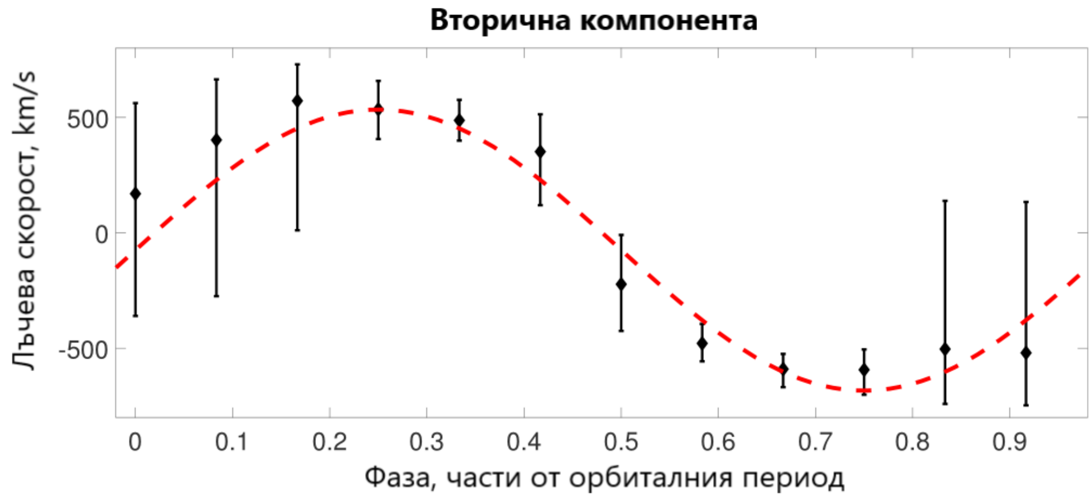
Справочни данни:
Радиус на Слънцето 696 000 km.
Температура на Слънцето 5772 K
Астрономическа единица 1 au = 149.6×10^6 km
Приемете, че Земята е кълбо с радиус – 6371 km
Маса на Земята – 6×10^{24} kg
Гравитационна константа 6.67×10^{-11} $m^3/kg.s^2$
Абсолютна звездна величина на Слънцето 4.74^m



Диаграма на Херцшпрунг-Ръсел с еволюционни трекове на звезди с различни маси. По хоризонталната ос е нанесена температурата на звездите, а по вертикалната ос – тяхната светимост в единици слънчеви светимости.

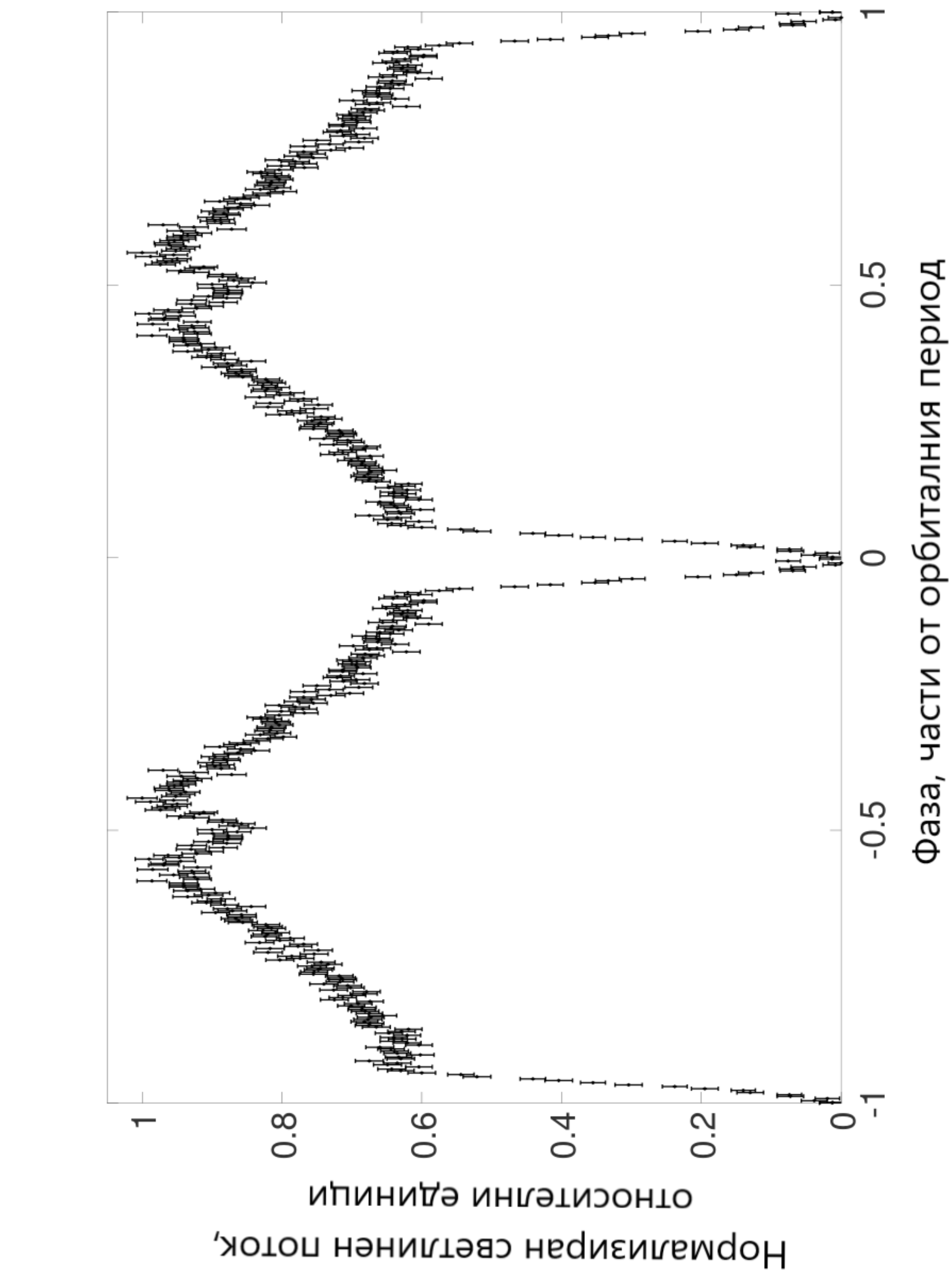
<u>Предайте този лист заедно с вашите решения на задачите!</u>





Криви на лъчевите скорости на компонентите в системата ZTF J153932.16+502738.8.

<u>Предайте този лист заедно с вашите решения на задачите!</u>



Крива на блясъка на затъмнително двойната система ZTF J153932.16+502738.8.

<u>Предайте този лист заедно с вашите решения на задачите!</u>