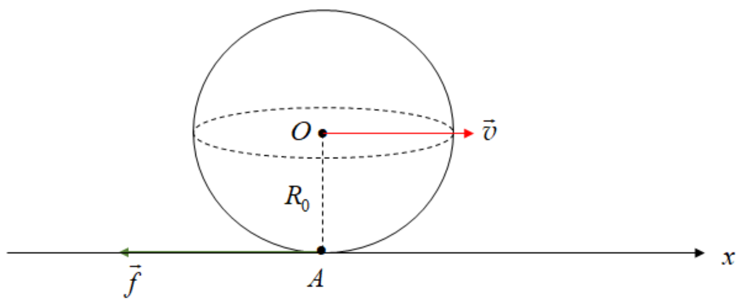
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛЕН КРЪГ НА ОЛИМПИАДАТА ПО ФИЗИКА

Решения на теоретичната тема за V състезателна група (11. и 12. клас)

Задача 1. Теория на билиардните топки

а) След централния удар, на топката *не* й е предадена начална ъглова скорост и тя започва да се търкаля *с* хлъзгане. Единствената сила, която действа на топката е силата на триене $\vec{f}$, която има въртящ момент с големина $N = f\ R_0$ и е в посока противоположна на посоката на движение, както е показано на фиг. 1.



Фиг. 1

Реакцията на опората е $R = Mg$, а силата на триене е

$$f = kR = kMg\ . \tag{1}$$

От закона на Нютон за въртеливото движение имаме:

$$I\alpha = N\ . \tag{2}$$

Получаваме, че ъгловото ускорение е:

$$\alpha = \frac{N}{I} = \frac{kMgR_0}{\frac{2}{5}MR_0^2} = \frac{5kg}{2R_0}\ . \tag{3}$$

В такъв случай ъгловата скорост се увеличава според закона:

$$\omega(t) = \alpha t = \frac{5kgt}{2R_0}. \tag{4}$$

От друга страна, движението на центъра на масите е равнозакъснително. Намираме ускорението на центъра на масите от втория закон на Нютон:

$$f = Ma \tag{5}$$

Оттук получаваме за ускорението:

$$a = \frac{f}{M} = \frac{kMg}{M} = kg\,. \qquad (6)$$

Понеже силата на триене е в посока противоположна на посоката на движение, движението е равнозакъснително и за закона на скоростта получаваме:

$$v(t) = v_0 - at = v_0 - kgt\,. \qquad (7)$$

Скоростта на точката на допиране A с масата (вж. Фиг. 3) е:

$$v_x^{(A)}(t) = v(t) - \omega(t) R_0\,. \qquad (8)$$

Билярдната топка започва да се търкаля без триене в момента τ_0, когато $v_x^{(A)}(\tau_0) = 0$. Оттук намираме уравнение за τ_0:

$$v(\tau_0) = \omega(\tau_0) R_0\,. \qquad (9)$$

Заместваме (4) и (7) в (9) и получаваме:

$$v_0 - kg\tau_0 = \frac{5kg\tau_0}{2}\,. \qquad (10)$$

Оттук получаваме и τ_0:

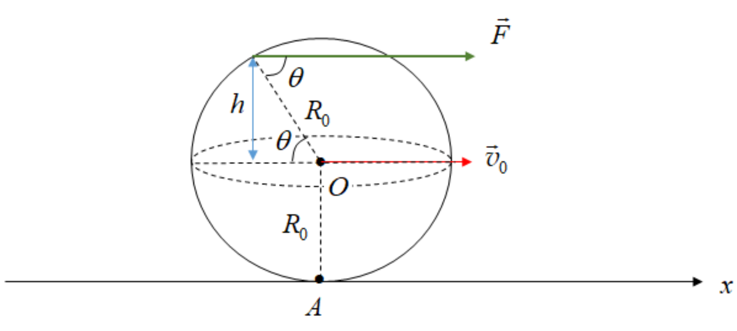
$$\tau_0 = \frac{2v_0}{7kg}\,. \qquad (11)$$

Оттук за скоростта на топката в момент τ_0 получаваме:

$$v(\tau_0) = v_0 - kg\tau_0 = \frac{5}{7} v_0 \qquad (12)$$

Както се и очаква $v(\tau_0) < v_0$. **[3 т.]**

б) Да разгледаме фиг. 2.



Фиг. 2

Нека силата, с която щеката удря топката, е $\vec{F}$. Ако считаме, че ударът е твърде кратък и времето за удара е Δt , то от втория закон на Нютон имаме:

$$F\Delta t = \Delta p = Mv_0 - 0 = Mv_0 . \qquad (13)$$

От друга страна въртящият момент на силата F спрямо точка O е очевидно

$$N_1 = FR_0 \sin\theta = Fh . \qquad (14)$$

От закона на Нютон за въртеливото движение, за времето Δt на удара имаме:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = N_1 , \qquad (15)$$

където ΔL е изменението на ъгловия момент на билярдната топка. Тогава имаме

$$\Delta L = N_1 \Delta t = Fh\Delta t = Mhv_0 . \qquad (16)$$

За получаване на Ур. (16), използвахме (13). От друга страна

$$\Delta L = I\Delta\omega = I\omega_0 - 0 = I\omega_0 . \qquad (17)$$

Като сравним (16) и (17) получаваме началната ъглова скорост, придадена от щеката:

$$\omega_0 = \frac{Mhv_0}{I} = \frac{Mhv_0}{\frac{2}{5}MR_0^2} = \frac{5hv_0}{2R_0^2} . \qquad (18)$$

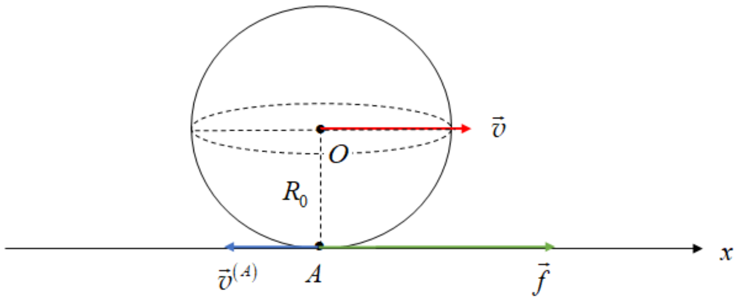
В мига след удара, скоростта на точка A е:

$$v_x^{(A)} = v_0 - \omega_0 R_0 = v_0 - \frac{5hv_0}{2R_0} = v_0\left(1 - \frac{5h}{2R_0}\right) . \qquad (19)$$

От условието $v_x^{(A)} = 0$ за търкаляне без хлъзгане, получаваме h_0 :

$$h_0 = \frac{2}{5} R_0 . \qquad (20)$$ **[3 т.]**

в) Щом като $h > \frac{2}{5} R_0$ от Ур. (19) следва, че $v_x^{(A)} < 0$. Щом това е така, силата на триене е насочена по оста x , както е показано на фиг. 3:



Фиг. 3

Отново имаме

$$f = kMg\,. \tag{21}$$

От втория закон на Нютон намираме ускорението на центъра на масите:

$$a = \frac{f}{M} = kg\,. \tag{22}$$

Центърът на масите се движи равноускорително и тогава за скоростта на центъра на масите имаме:

$$v(t) = v_0 + at = v_0 + kgt\,. \tag{23}$$

От закона за въртеливото движение получаваме ъгловото ускорение на топката:

$$\alpha = \frac{f\,R_0}{I} = \frac{kMgR_0}{\frac{2}{5}MR_0^2} = \frac{5kg}{2R_0}\,. \tag{24}$$

Въртеливото движение е равнозакъснително и закона за ъгловата скорост е:

$$\omega(t) = \omega_0 - \alpha t = \omega_0 - \frac{5kgt}{2R_0}\,. \tag{25}$$

От Ур. (18) имаме:

$$\omega(t) = \frac{5hv_0}{2R_0^2} - \frac{5kgt}{2R_0} = \frac{5}{2R_0}\left(\frac{hv_0}{R_0} - kgt\right). \tag{26}$$

Времето τ_1, за което топката започва да се търкаля без хлъзгане, намираме от условието $v_x^A(\tau_1) = 0$, или което е все едно:

$$\omega(\tau_1)R_0 = v(\tau_1) \tag{27}$$

От Ур. (23) и (26), (27) се трансформира в:

$$\frac{5}{2}\left(\frac{hv_0}{R_0}-kg\tau_1\right)=v_0+kg\tau_1 \qquad (28)$$

Оттук за τ_1 се получава:

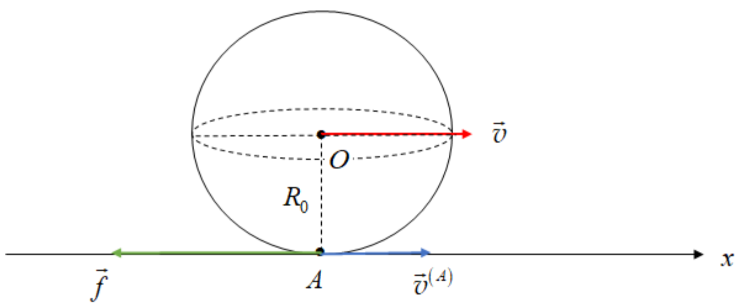
$$\tau_1=\frac{2v_0}{7gk}\left(\frac{5h}{2R_0}-1\right). \qquad (29)$$

За скоростта на центъра на масите имаме:

$$v(\tau_1)=v_0+kg\tau_1=\frac{5}{7}v_0\left(1+\frac{h}{R_0}\right). \qquad (30)$$

И понеже $h>\frac{2}{5}R_0$, то $v(\tau_1)>v_0$, както и се очаква. **[4 т.]**

г) Щом като $h<\frac{2}{5}R_0$ от Ур. (19) следва, че $v_x^{(A)}>0$. Тогава силата на триене $\vec{f}$ сочи обратно на оста x, както е показано на фиг. 4.



Фиг. 4

С изчисления подобни на тези от в) и като отчетем, че тук центърът на масите се движи равнозакъснително, а въртеливото движение е равноускорително, получаваме:

$$\tau_1=\frac{2v_0}{7gk}\left(1-\frac{5h}{2R_0}\right). \qquad (31)$$

А за скоростта на центъра на масите имаме:

$$v(\tau_2)=\frac{5}{7}v_0\left(1+\frac{h}{R_0}\right). \qquad (32)$$

И понеже $h<\frac{2}{5}R_0$ получаваме, че $v(\tau_2)<v_0$, както и се очаква, като отчетем посоката на силата не триене $\vec{f}$. **[4 т.]**

д) При удар между двете топки, центърът на масите на движещата се топка (топка 1) се спира, а другата топка (топка 2) започва да се движи със същата скорост, каквато е имала топка 1 в мига преди удара. Обаче топка 1 (макар центърът на масите ѝ да е спрял в мига на удара) продължава да се върти с ъглова скорост $\omega\left(t_0\right)$, където t_0 е моментът на удара. В случая, когато $h > h_0$, веднага след удара $v_x^{(A)} < 0$ и силата на триене в мига след удара има компонента $f_x > 0$ и центърът на масите на топка 1 се ускорява напред по оста x, докато топката започне да се търкаля без хлъзгане.

Когато $0 < h < h_0$, при удар с друга топка (топка 2), центърът на масите на топка 1 също спира и отново в мига на удара $v_x^{(A)} < 0$ и силата на триене в мига на удара отново има компонента $f_x > 0$. Отново центърът на масите се ускорява *напред*, докато топката започне да се търкаля без хлъзгане.

Когато $h < 0$, на топката е придобита начална ъглова скорост ω, с посока *обратна* на другите два случая. Ако в мига на удара с друга топка, тази ъглова скорост остане в *тази* посока, то силата на триене в мига на удара има компонента $f_x < 0$ и топката се връща *назад*, докато не започне отново да се търкаля без хлъзгане. **[1 т.]**

Задача 2. Топлинна машина

Част А. а) От уравнението на политропния процес имаме $P_3V_3^n = P_4V_4^n$. Като отчетем, че

$$P_3 = 2P_1, \quad V_3 = 4V_1, \quad P_4 = P_1/2, \quad V_4 = 2V_1, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

намираме

$$2^{n+2} = 1 \quad \to \quad n = -2. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Тогава можем да запишем

$$C = \frac{C_P - nC_V}{1-n} = \frac{17}{6}R, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

при което са отчетени $C_V = \frac{5}{2}R$ и $C_P = \frac{7}{2}R$. **[0,5 т.]**

б) За да определим вида на цикъла, ще пресметнем извършената от газа работа

$$W = Q_{\text{пол}} - Q_{\text{отд}}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Газът получава топлина при изобарното разширение 1–2 и при изохорното нагряване 2 – 3, т. е. имаме

$$Q_{\text{пол}} = C_P(T_2 - T_1) + C_V(T_3 - T_2). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Като отчетем уравнението на състояние $PV = RT$, намираме

$$RT_1 = P_1V_1, \quad RT_2 = 4P_1V_1, \quad RT_3 = 8P_1V_1, \quad RT_4 = P_1V_1, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

откъдето след заместване получаваме

$$Q_{\text{пол}} = \frac{41}{2}P_1V_1. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Аналогично намираме

$$Q_{\text{отд}} = \left| C(T_4 - T_3) + RT_1 \ln\left(\frac{V_1}{2V_1}\right) \right| = \frac{119 + 6\ln 2}{6} P_1 V_1 . \quad \textbf{[1 т.]}$$

Тогава, извършената от газа работа, е

$$W = \frac{4 - 6\ln 2}{6} P_1 V_1 = -0,026 P_1 V_1 . \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Отрицателният знак на работата, извършена от газа, означава, че външен източник извършва работа върху газа, а не газът върху околната среда, т. е. $A = -W > 0$.**[0,5 т.]** Следователно описаният цикъл е цикъл на хладилник (топлинна помпа).

в) По определение имаме

$$\varphi = \frac{Q_{\text{пол}}}{A} = \frac{123}{6\ln 2 - 4} \approx 774 , \qquad \textbf{[1 т.]}$$

$$\psi = \frac{Q_{\text{отд}}}{A} = \frac{119 + 6\ln 2}{6\ln 2 - 4} \approx 775 . \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част **Б.** При зададени температура T_1 на нагревателя и T_2 на охладителя максимална работа извършва идеален топлинен двигател с КПД

$$\eta = 1 - \frac{T_2}{T_1} . \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Тогава извършената работа е

$$W_{\max} = \eta Q_1 , \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където Q_1 е полученото от работното вещество количество топлина. Тъй като за идеален двигател

$$\frac{Q_1}{T_1} = \frac{Q_2}{T_2} \quad \rightarrow \quad Q_1 = \frac{T_1}{T_2} Q_2 \qquad \textbf{[1 т.]}$$

или

$$W_{\max} = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) Q_2 . \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Топлинният двигател ще работи, докато отдаденото от работното вещество количество топлина Q_2 не разтопи айсберга. За оценка ще изберем

$$Q_2 = \lambda \rho V , \quad T_1 = 293\,\text{K} , \quad T_2 = 273\,\text{K} , \qquad \textbf{[1 т.]}$$

при което получаваме

$$W_{\max} = \left(\frac{T_1}{T_2} - 1 \right) \lambda \rho V \approx 2.10^{16}\ \text{J} . \qquad \textbf{[1,5 т.]}$$

Задача 3. Диелектрик в електростатично поле

а) От формулата за капацитет на плосък кондензатор имаме:

(1) $$C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 S}{d}.$$ **[1,0 т]**

Като вземем предвид, че $S = ab$, получаваме:

(2) $$C_0 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 ab}{d} =$$ **[0,5 т]**

$$= \frac{5 \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}\ \text{F/m} \cdot 2{,}0 \cdot 10^{-2}\ \text{m} \cdot 1{,}0 \cdot 10^{-1}\text{m}}{1{,}0 \cdot 10^{-3}\text{m}} = 8{,}85 \cdot 10^{-12}\text{F}.$$ **[0,5 т]**

б) Системата е еквивалентна на два успоредни кондензатора, както е показано на схемата – първият, пълен с диелектрик, и с площ на плочите $S_1 = (a - x)b$, а вторият – въздушен с площ на плочите $S_1 = xb$. Капацитетите на двата кондензатора са съответно:

(3) $$C_1 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 (a - x)b}{d} \quad \text{и} \quad C_2 = \frac{\varepsilon_0 xb}{d}$$ **[1,0 т]**

Еквивалентният капацитет при успоредно свързване е:

(4) $$C = C_1 + C_2 = C_0 - \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 bx}{d}$$ **[1,0 т]**

в) В началото $x = 0$ и зарядът на положителната плоча на кондензатора е:

(5) $$q_1 = C_0 U = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 abU}{d}.$$ **[0,5 т]**

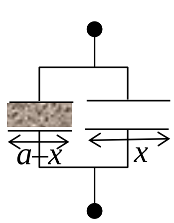
В момента, преди пластината да бъде извадена напълно, $x = a$ и зарядът на положителната плоча става:

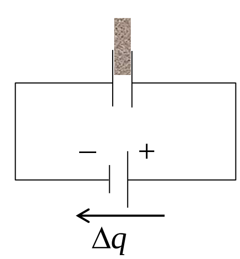
(6) $$q_2 = C(a)U = \frac{\varepsilon_0 abU}{d}.$$ **[0,5 т]**

Зарядът, минал през източника, е равен на промяната на заряда на кондензатора:

(7) $$\Delta q = q_2 - q_1 = -\frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 abU}{d} \approx -7{,}1 \cdot 10^{-10}\ \text{C}.$$ **[1,0 т]**

Знакът „минус” означава, че вътре в източника зарядът се пренася от положителния му полюс – към отрицателния му полюс, както е показано на фигурата. **[1,0 т]**





г) Потенциалната енергия на кондензатора в началния момент е:

(8) $$W_1 = \frac{C_0U^2}{2} = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 abU^2}{2d},$$ **[1,0 т]**

а след изваждането на пластинката – съответно:

(9) $$W_2 = \frac{C(a)U^2}{2} = \frac{\varepsilon_0 abU^2}{2d},$$ **[1,0 т]**

За да бъде извадена пластинката от кондензатора, върху нея трябва да действа външна сила със същата големина F като връщащата сила, но в противоположна посока. От закона за запазване на енергията следва, че промяната на електричната потенциална енергия на кондензатора при изваждането на диелектрика е:

(10) $$W_2 - W_1 = Fa + \Delta qU,$$ **[2,0 т]**

където Fa е работата на външната сила, Δq е промяната на заряда на кондензатора, а ΔqU - съответната работа на електродвижещите сили в източника вследствие на миналия през него заряд. Като използваме израза (7) за преминалия заряд, получаваме:

(11) $$-\frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 abU^2}{2d} = Fa - \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 abU^2}{d},$$

откъдето намираме големината на силата:

(12) $$F = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 bU^2}{2d} \approx 1{,}8 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{N}.$$ **[1,0 т]**

г) Маслото се издига, докато електричната сила, „дърпаща" масления стълб нагоре в кондензатора, се уравновеси със силата на тежестта:

(13) $$\frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 bU^2}{2d} = \rho bhdg.$$ **[1,0 т]**

Оттук изразяваме височината на издигане на маслото:

(14) $$h = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 U^2}{2\rho g d^2}.$$

Вижда се, че h се увеличава с повишаване на приложеното напрежение. Напрежението може да нараства, докато в една от двете среди – въздух или масло, настъпи електричен пробив. Тъй като интензитетът на полето е еднакъв и в двете среди, електричен пробив ще настъпи първо във въздуха, който има по-малко поле на пробив. Следователно максималното напрежение е:

(15) $$U_{\max} = E_{\text{в}} d,$$ **[1,0 т]**

а максималната височина на издигане на маслото съответно:

(16) $$h_{\max} = \frac{(\varepsilon - 1)\varepsilon_0 E_{\text{в}}^2}{2\rho g} \approx 6{,}8 \cdot 10^{-3}\mathrm{m} = 6{,}8\ \mathrm{mm}.$$ **[1,0 т]**

Задача 4. "Воден" експеримент на Физо (Fizeau)

а) Нека последователните положения на едно тяло в двете системи са 1 и 2. Тогава $\Delta x' = x_2' - x_1' = \frac{x_2 - ut_2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{x_1 - ut_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Аналогично

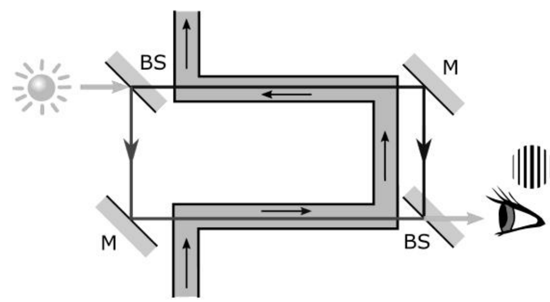
$\Delta t' = t_2' - t_1' = \frac{t_2 - \frac{ux_2}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} - \frac{t_1 - \frac{ux_1}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}$. Разделяйки първото на второто равенство, се получава $v' = \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - u\Delta t}{\Delta t - \frac{u\Delta x}{c^2}} = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}}$. (1) **[3 т.]**

б) Ако $u \ll c$, то (1) може да се преобразува така: $v' = \frac{v-u}{1-\frac{uv}{c^2}} \approx (v-u)\left(1+\frac{uv}{c^2}\right) =$

$= v - u + \frac{uv^2}{c^2} - \frac{u^2 v}{c^2} \approx v - u + \frac{uv^2}{c^2} = v - u\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$. **[3 т.]**

в) $n_+ = \frac{c}{v_+} = \frac{c}{v-u\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\frac{v}{c}-\frac{u}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{n}{1-\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)}$.

$n_- = \frac{c}{v_-} = \frac{c}{v+u\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{1}{\frac{v}{c}+\frac{u}{c}\left(1-\frac{v^2}{c^2}\right)} = \frac{n}{1+\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)}$. **[2 т.]**



г) Разликата в оптичните пътища на двата лъча е $\Delta L = n_+ l - n_- l = \frac{nl}{1-\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)} - \frac{nl}{1+\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)} =$

$= \frac{nl\left[1+\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)-\left(1-\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right)\right]}{1-\left[\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right]^2} = \frac{nl\left[\frac{2u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right]}{1-\left[\frac{u}{c}\left(n-\frac{1}{n}\right)\right]^2} \approx \frac{2lu}{c}(n^2-1)$. Интерференчната картина ще се измести на k максимума в сравнение със случая на неподвижна вода, когато $\Delta L = k\lambda$, следователно $\frac{2lu}{c}(n^2-1) = k\lambda$, откъдето $u = \frac{k\lambda c}{2l(n^2-1)}$. **[4 т.]**

д) Картината ще се измести в противоположна посока. **[1 т.]**

е) $u_1 = \frac{\lambda c}{2l(n^2-1)} = \frac{5{,}00.10^{-7}\ \text{m}.3{,}00.10^{8}\ \text{m/s}}{2.1{,}50\ \text{m}.(1{,}333^2-1)} \approx 64$ m/s. (В историческия експеримент скоростта на водата е била по-малка и картината се е измествала на по-малко от един максимум). **[2 т.]**