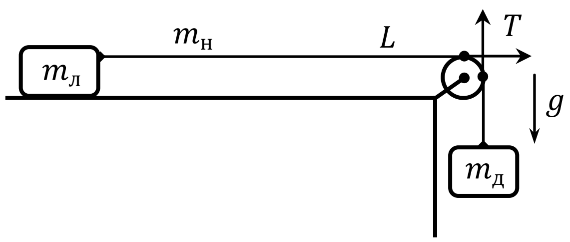
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА
1 април 2022 г.
Решения на темата за IV състезателна група (10. клас)

Задача 1. Теглилки на масивна нишка



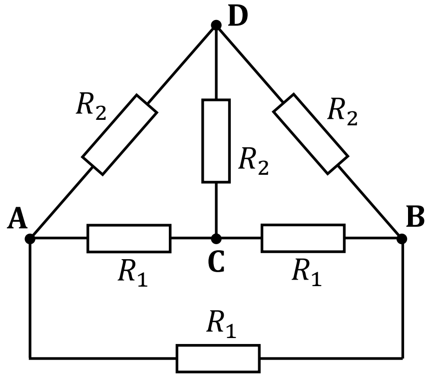
а) Когато лявата теглилка достига макарата, се изпълняват следните две уравнения на Нютон за хоризонталната и вертикалната части от системата: $T_{кр} = m_л a_{кр}$ **[0.5 т.]** и $m_н g - T_{кр} = m_н a_{кр}$ **[0,5 т.]**, където $T_{кр}$ е моментната сила на опън на нишката върху макарата. Получаваме, че $a_{кр} = \frac{m_н}{m_л + m_н} g = \frac{2}{5} g \approx 4\,\mathrm{m/s^2}$. **[1 т.]**

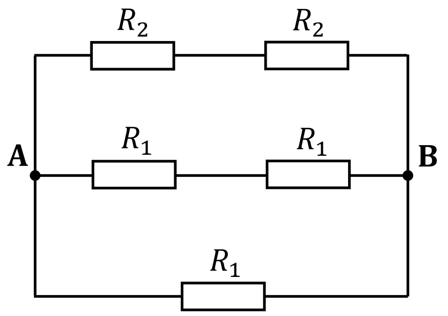
б) Първоначално, хоризонталната част на нишката е с дължина d, като съответната маса е $m_н d/L$. **[0,2 т.]** Тогава вертикалната част на нишката има дължина $L - d$ и маса $m_н(L - d)/L$. **[0,3 т.]** От II принцип на Нютон имаме следните две уравнения за хоризонталната и вертикалната части от системата: $T_{нач} = \left(m_л + \frac{d}{L} m_н\right) a_{нач}$ **[0,5 т.]** и $\left(m_д + \frac{L-d}{L} m_н\right) g - T_{нач} = \left(m_д + \frac{L-d}{L} m_н\right) a_{нач}$ **[0,5 т.]**, като $T_{нач}$ е първоначалната сила на опън на нишката върху макарата. Следователно $a_{нач} = \frac{m_д + \frac{L-d}{L} m_н}{m_л + m_д + m_н} g$. **[0,5 т.]** Окончателното ускорение на системата е равно на ускорението непосредствено преди откачването на дясната теглилка, т.е. $a_{кр} = \frac{m_д + \frac{L-d'}{L} m_н}{m_л + m_д + m_н} g = \frac{m_н}{m_л + m_н} g$. **[0,5 т.]** Оттук $d' = \frac{m_л m_д}{m_н (m_л + m_н)} L = \frac{3}{10} L = 0{,}6\,\mathrm{m}$. **[1,5 т.]**

в) Първоначалното ускорение на системата е равно на ускорението непосредствено след откачването на дясната теглилка, т.е. $a_{нач} = \frac{(L - d')m_н}{L(m_л + m_н)} g = \frac{m_н(m_л + m_н) - m_л m_д}{(m_л + m_н)^2} g = \frac{7}{25} g \approx 2{,}8\,\mathrm{m/s^2}$. **[2 т.]**

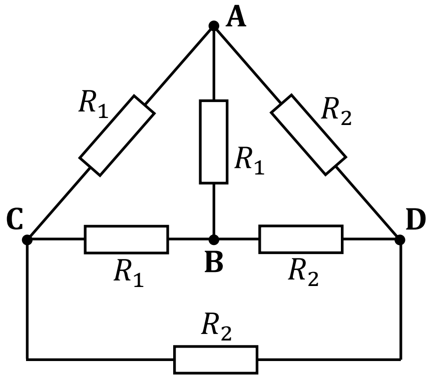
г) От равенствата $a_{нач} = \frac{m_д + \frac{L-d}{L} m_н}{m_л + m_д + m_н} g = \frac{m_н(m_л + m_н) - m_л m_д}{(m_л + m_н)^2} g$ **[0,5 т.]** получаваме, че $d = \frac{m_л m_д [2(m_л + m_н) + m_д]}{m_н (m_л + m_н)^2} L = \frac{33}{50} L \approx 1{,}3\,\mathrm{m}$. **[1,5 т.]**

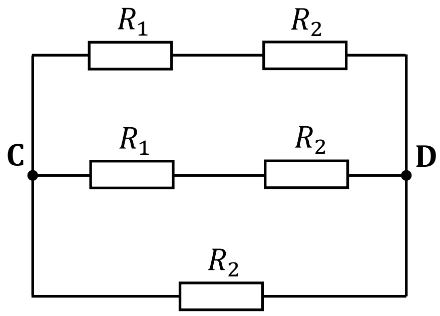
Задача 2. Електрическа пирамида



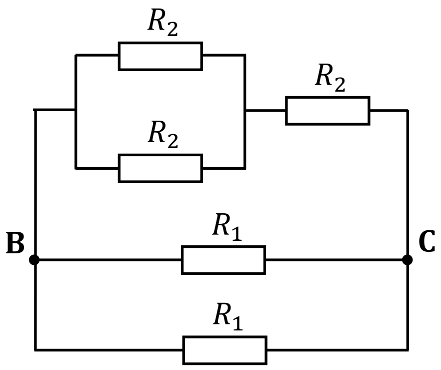


а) Електрическата верига може да се представи планарно по начина показан на фигурата по-горе вляво. Тази верига е симетрична спрямо отсечката **CD** и при подаване на напрежение между точките **A** и **B** няма да има напрежение между **C** и **D**. **[0,5 т.]** В такъв случай няма да протече ток през средния резистор със съпротивление R_2 (горната част от веригата представлява балансиран Уитстонов мост) и той може да бъде откачен от веригата. **[0,5 т.]** Получава се еквивалентната схема, показана на фигурата по-горе вдясно. **[0,5 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **B**, е равно на $R_{\mathbf{AB}} = \frac{R_1(2R_1)(2R_2)}{R_1(2R_1)+R_1(2R_2)+(2R_1)(2R_2)} = \frac{2R_1R_2}{R_1+3R_2}$. **[1 т.]** Изходната електрическа верига може да се представи планарно и по начина показан на фигурата по-долу вляво. Ако подадем напрежение между точките **C** и **D** в тази верига, конфигурацията от токове ще бъде симетрична спрямо правата, свързваща точките **A** и **B**. **[1 т.]** В този случай няма да протече ток през средния резистор със съпротивление R_1 (отново горната част от веригата представлява балансиран Уитстонов мост) и може да го откачим от веригата. **[0,5 т.]** Получава се система от последователно и успоредно свързани резистори с еквивалентна схема, показана на фигурата по-долу вдясно. **[0,5 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **C** и **D**, е равно на $R_{\mathbf{CD}} = \frac{R_2(R_1+R_2)^2}{2R_2(R_1+R_2)+(R_1+R_2)^2} = \frac{R_2(R_1+R_2)}{R_1+3R_2}$. **[1 т.]** От условието $R_{\mathbf{CD}} = 2R_{\mathbf{AB}}$ следва, че отношението $R_2/R_1 = 3$. **[1 т.]**



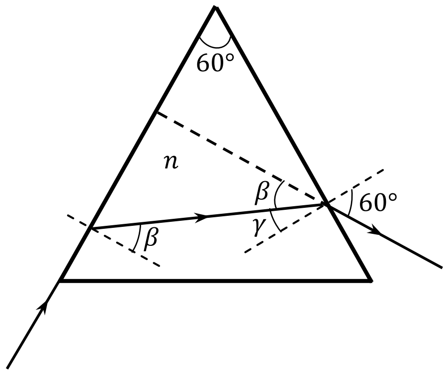


б) Мощността, която се отделя в резисторите, е $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R_{\mathbf{AB}}} = \frac{(R_1+3R_2)\mathcal{E}^2}{2R_1R_2} = \frac{5\mathcal{E}^2}{3R_1}$. **[0,5 т.]** Следователно $R_1 = \frac{5\mathcal{E}^2}{3P}$ **[0,5 т.]**, а $R_2 = 3R_1 = \frac{5\mathcal{E}^2}{P}$. **[0,5 т.]**

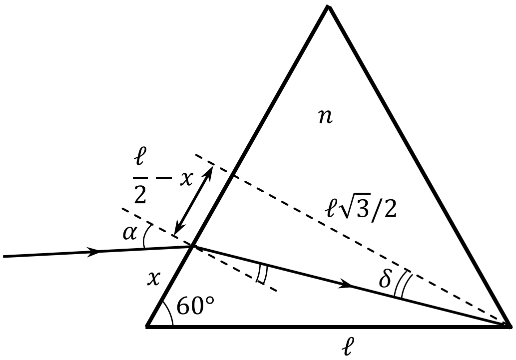


в) Ако точките **A** и **B** са свързани накъсо, се получава схемата вляво. **[1 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **B** и **C**, е равно на $R'_{\mathbf{BC}} = \frac{3R_1R_2}{2(R_1+3R_2)} = \frac{9R_1}{20} = \frac{3\mathcal{E}^2}{4P}$. **[1 т.]**

Задача 3. Оптическа призма



а) Както може да се види на чертежа вляво, лазерният лъч първо се пречупва под ъгъл β, като $\sin\beta = \frac{1}{n}$. **[0,5 т.]** Вътре в призмата ъгълът на падане $\gamma = 60° - \beta$. **[0,5 т.]** За второто пречупване от закона на Снелиус имаме, че $n\sin\gamma = \sin 60°$. **[0,5 т.]** Оттук $n\sin\gamma = n\sin(60° - \beta) = n(\sin 60°\cos\beta - \cos 60°\sin\beta) = \sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$ **[0,5 т.]**, откъдето $\sqrt{3(n^2-1)} = 1 + \sqrt{3}$ **[0,5 т.]**, т.е. $n = \sqrt{\frac{7+2\sqrt{3}}{3}} \approx 1{,}87$ **[1 т.]**.



б) На чертежа вляво се вижда ходът на светлинния лъч. От закона на Снелиус следва връзка между ъгъла на падане α и ъгъла на пречупване δ: $\sin\delta = \frac{\sin\alpha}{n} = \frac{1}{2n} \approx 0{,}27$, т.е. търсеният ъгъл $\delta \approx 16°$. **[1 т.]** След като влезе в призмата, лъчът минава през срещуположния ръб на призмата и играе ролята на хипотенуза в правоъгълен триъгълник, чийто катети са с дължини $\ell\sqrt{3}/2$ и $\frac{\ell}{2} - x$ (вж. фигурата вляво). **[1 т.]** Следователно $\tan\delta = \frac{\ell - 2x}{\ell\sqrt{3}} = \frac{\sin\delta}{\cos\delta} = \frac{1}{\sqrt{4n^2-1}}$. **[1 т.]** Търсеното разстояние е $x = \frac{\ell}{2}\left(1 - \sqrt{\frac{3}{4n^2-1}}\right) \approx 2{,}6$ cm. **[1 т.]**

в) Ако увеличаваме ъгъла на падане, трябва лъчът да пада все по-близо до долния ляв ръб на призмата, за да мине през срещуположния ръб, след като влезе в призмата. Максималният ъгъл на падане се реализира, ако лъчът „влезе“ през долния ляв ръб, т.е. при $x_{\min} = 0$. **[0,5 т.]** Оттук следва, че за ъгъла на пречупване $\tan\delta_{\max} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и $\delta_{\max} = 30°$. **[0,5 т.]** За съответния максимален ъгъл на падане $\sin\alpha_{\max} = n\sin\delta_{\max} = n\sin 30° = \frac{n}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{7+2\sqrt{3}}{3}} \approx 0{,}93$ **[1 т.]** и $\alpha_{\max} \approx 69°$ **[0,5 т.]**.