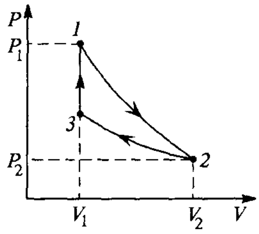
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА,
ОБЛАСТЕН КРЪГ, 19 февруари 2022 г.
Тема за 12. клас (шеста състезателна група)

Задача 1. Топлинен двигател

а) На p,V – диаграмата (фиг. 1.1) е показан цикълът, по който работи топлинният двигател. (За всяка правилно начертана графика на процес по 0,5 т.) **[1,5 т.]**



Фиг. 1.1

б) Работното вещество има максимална температура $T_{\max}$ в състояние 1. **[0,5 т.]** Всички състояния от изотермата 2–3 имат температура $T_{\min}$. **[1 т.]**

в) Максимален КПД има двигател, който работи по цикъл на Карно. Той включва изотермно разширение при $T = T_{\max}$ **[0,5 т.],** адиабатно разширение **[0,5 т.],** изотермно свиване при $T = T_{\min}$ **[0,5 т.]** и адиабатно свиване **[0,5 т.].** Тогава КПД е

$$\eta_0 = 1 - \frac{T_{\min}}{T_{\max}}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

г) По определение КПД на топлинен двигател е

$$\eta = 1 - \frac{Q_2}{Q_1}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където Q_1 е полученото от работното вещество количество топлина за един цикъл, а Q_2 е отдаденото от работното вещество количество топлина за един цикъл. Газът получава топлина при изохорния процес, като

$$Q_1 = C_V (T_{\max} - T_{\min}), \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

а отдава топлина при изотермното свиване. Тъй като при изотермния процес имаме $\Delta U = 0$ **[0,5 т.],** от първия принцип на термодинамиката следва

$$Q_2 = -A_{\text{газ}} = RT_{\min} \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right), \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където V_1 е минималният обем на газа, а V_2 – максималният. От адиабатния процес имаме

$$T_{\max} V_1^{\gamma-1} = T_{\min} V_2^{\gamma-1}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

откъдето следва

$$\frac{V_2}{V_1}=\left(\frac{T_{\max}}{T_{\min}}\right)^{1/(\gamma-1)} .$$ **[0,5 т.]**

Тогава за КПД получаваме

$$\eta=1-\frac{Q_2}{Q_1}=1-\frac{R}{C_V(\gamma-1)}\frac{\ln\left(\dfrac{T_{\max}}{T_{\min}}\right)}{\dfrac{T_{\max}}{T_{\min}}-1}=1-\frac{\ln\alpha}{\alpha-1},$$ **[0,5 т.]**

тъй като

$$\frac{R}{C_V(\gamma-1)}=\frac{R}{C_V\left[\left(C_P/C_V\right)-1\right]}=\frac{R}{C_P-C_V}=1 .$$ **[0,5 т.]**

г) Числената стойност на КПД е

$$\eta=1-\frac{\ln\alpha}{\alpha-1}=1-\frac{1}{2}\ln 3\approx 0,45 .$$ **[0,5 т.]**

Задача 2. Процеси с идеален газ

Част А. а) Разглеждаме въздуха в стаята като идеален газ. При понижаване на температурата от T_1 до $T_2=T_1-\Delta T$ масата на газа в стаята се променя с $\Delta m=m_2-m_1$ **[0,5 т.]**, тъй като налягането P е постоянно и равно на атмосферното, както и обемът V на въздуха в стаята **[0,5 т.]**. Като запишем уравнението на Клапейрон-Меделеев за началното и крайното състояние на въздуха, имаме:

(1) $$PV=\frac{m_1}{\mu}RT_1,\qquad PV=\frac{m_2}{\mu}RT_2 ,$$ **[1 т.]**

и съответно получаваме:

$$\Delta m=\frac{\mu PV}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)=\frac{\mu PV}{RT_1(T_1-\Delta T)}\Delta T.$$ **[1 т.]**

Като използваме стойностите на величините в SI, намираме:

$$\Delta m=\frac{0,029\ \text{kg/mol}\ .\ 1,0.10^5\ \text{Pa}\ .\ 120\ \text{m}^3\ .\ 10\ \text{K}}{8,31\ \text{J/(mol.K)}\ .\ 300\ \text{K}\ .\ 290\ \text{K}}\approx 4,8\ \text{kg} ,$$ **[0,5 т.]**

т. е. масата на въздуха се е увеличила. **[0,5 т.]**

б) Вътрешната енергия на идеалния газ зависи само от температурата T и масата m и се дава с израза

$$U=\frac{m}{\mu}C_V T .$$ **[0,5 т.]**

Моларният топлинен капацитет $C_V=sR/2=\text{const}$ (коефициентът s = 5 за въздуха, но в случая не е нужно учениците да посочват точната му стойност) .**[0,5 т.]** Като използваме уравнението на състояние и израза за C_V, за вътрешната енергия получаваме израза

$$U=\frac{s}{2}PV .$$ **[0,5 т.]**

Тъй като налягането P и обемът V на въздуха в стаята са постоянни, имаме $\Delta U = 0$, т.е. вътрешната енергия U не се променя при описания процес. **[0,5 т.]**

<u>Част Б.</u> а) Броят молове въздух в началото е:

$$n = \frac{PV}{RT}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

а броят молекули съответно:

$$N = N_{\mathrm{A}} n = \frac{N_{\mathrm{A}} PV}{RT} = \frac{PV}{k_{\mathrm{B}} T}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

От получената връзка между брой молекули и налягане на въздуха в спътника се вижда, че когато налягането се понижи до $p_1 = p - \Delta p = 0{,}8p$, в спътника съответно ще останат:

$$N_1 = \frac{0{,}8PV}{k_{\mathrm{B}} T} \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

молекули. Следователно броят молекули, напуснали спътника, е:

$$\Delta N = N - N_1 = \frac{0{,}2PV}{k_{\mathrm{B}} T}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

За верен се приема и израз, в който вместо k_{B} участва еквивалентното отношение R/N_{A}. След като заместим с числените данни, намираме:

$$\Delta N = \frac{0{,}2\ .\ 1{,}0.10^{5}\ \mathrm{Pa}\ .\ 1{,}0\ \mathrm{m}^{3}}{1{,}38.10^{-23}\ \mathrm{J/K}\ \ .\ 273\ \mathrm{K}} \approx 5{,}3.10^{24}. \quad \textbf{[0,5 т.]}$$

б) Скоростта, с която изтича въздухът, е приблизително равна на средноквадратичната скорост на молекулите. При изтичане на въздуха температурата в спътника не се променя. Тъй като средноквадратичната скорост на молекулите:

$$v_{\text{с.к.}} = \sqrt{\frac{3k_{\mathrm{B}} T}{m}}$$

зависи само от температурата, но не зависи от налягането, следва, че през цялото време молекулите излизат през отвора с приблизително еднаква скорост. **[0,5 т.]**

Като вземем предвид, че масата на една молекула е $m = \mu/N_{\mathrm{A}}$ и използваме връзката: $R = k_{\mathrm{B}} N_{\mathrm{A}}$, получаваме:

$$v_{\text{с.к.}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = \sqrt{\frac{3\ .\ 8{,}3\ \mathrm{J/(mol.K)}\ .\ 273\ \mathrm{K}}{0{,}029\ \mathrm{kg/mol}}} \approx 480\ \mathrm{m/s}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Точката за крайния резултат се раздела на 0,5 т. за аналитичен израз и 0,5 т. за числен отговор. Численият отговор се приема за верен, ако при закръгляне към 10 m/s дава горния резултат.

Задача 3. Движение на изкуствен спътник на Земята

а) Нормалното ускорение на спътника е $a_n = \omega^2 R$ **[0,25 т.]**, като $\omega = \omega_0 = 2\pi/T_0$ **[0,5 т.].** Тук $T_0 = 24\ \mathrm{h}$ е времето за едно завъртане. **[0,25 т.]** Силата на гравитационното привличане на спътника от Земята играе роля на центростремителна сила, под действие на която спътникът с маса m се движи равномерно по окръжност,
т. е. имаме

(1) $$m\omega^2 R = G\frac{mM}{R^2},$$ **[1 т.]**

където M е масата на Земята. Тя може да бъде изразена чрез земното ускорение g и радиуса R_0. Като приравним силата на тежестта на единица маса g с гравитационната сила, която ѝ действа на повърхността на Земята GM/R_0^2 **[0,25 т.]**, намираме

$$GM = gR_0^2.$$ **[1 т.]**

Тогава, като заместим в равенството (1), стигаме до израза

(2) $$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{g}{\omega^2 R_0}\right)^{1/3}.$$ **[1 т.]**

Тъй като $\omega = \omega_0 = 2\pi/T_0$, намираме

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{gT_0^2}{4\pi^2 R_0}\right)^{1/3} \approx 6,6.$$ **[1 т.]**

б) Ще въведем относителната по големина ъглова скорост $\Delta\omega = |\omega - \omega_0|$, която при $T = 2T_0$ удовлетворява равенството

$$\Delta\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{T_0}.$$ **[1 т.]**

Тогава от равенството $|\omega - \omega_0| T_0 = \pi$, получаваме при $\omega > \omega_0$, $\omega = 3\pi/T_0$.**[1 т.]** Като използваме (2), намираме

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{gT_0^2}{9\pi^2 R_0}\right)^{1/3} \approx 5,0.$$ **[1 т.]**

Аналогично при $\omega < \omega_0$, $\omega = \pi/T_0$.**[1 т.]** Тогава от (2) получаваме

$$\frac{R}{R_0} = \left(\frac{gT_0^2}{\pi^2 R_0}\right)^{1/3} \approx 10,5.$$ **[1 т.]**