МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Областен кръг на олимпиадата по астрономия
13 февруари 2022 г.
Възрастова група XI-XII клас – решения

1 задача. Вулканът Чимборасо.

Най-високият планински връх в Еквадор е вулканът Чимборасо с височина 6263 метра над морското равнище и географски координати $\lambda = 78° 49' W$, $\varphi = 1° 28' S$. На разстояние 219 km западно от Чимборасо, на брега на Тихия океан се намира градчето Пуерто Лопес. От върха има пряка видимост към брега на океана.

- **А)** Еквадор се намира на пет часови пояса западно от Гринуич (UT – 5h). За наблюдател от Чимборасо, средно през годината, в колко часа по поясно време е местното пладне (когато Слънцето пресича меридиана на мястото)?
- **Б)** Кой ще види пръв залеза на Слънцето – наблюдател на Чимборасо или наблюдател в Пуерто Лопес? Колко секунди по-рано ще се случи това?
- **В)** Чимборасо е най-отдалечената точка по земната повърхност от центъра на Земята, въпреки че Еверест е висок 8848 метра над морското равнище. Обяснете защо.

Решение: На централния меридиан на петия часови пояс западно от Гринич (UT – 5h) средното местно пладне настъпва в 12h поясно време. Географската дължина на централния меридиан на петия часови пояс е $\lambda_5 = 5\times15° = 75°$ W. Чимборасо се намира на запад от централния меридиан и там кулминацията на Слънцето леко закъснява. Разликата между географските дължини е:

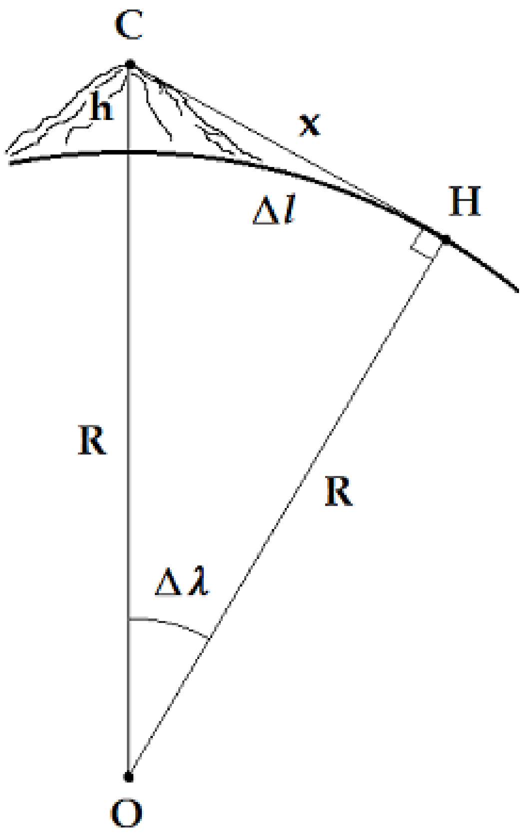
$$\lambda - \lambda_5 = 78°49' - 75° = 3°49'$$

За 1 час средното Слънце изминава 15° по небесния екватор. Следователно времето Δt, за което то ще измине допълнителния ъгъл по географска дължина е:

$$\Delta t = \frac{\lambda - \lambda_5}{15°} = 0.25(4)h = 15^m 16^s$$

Затова Слънцето ще бъде на меридиана на мястото, за наблюдател на върха на Чимборасо, в $12^h 15^m 16^s$. Тогава за него ще настъпи местно пладне.

За да определим в коя точка Слънцето по-рано ще залезе, трябва да намерим отдалечеността на хоризонта в западна посока, когато наблюдаваме от върха на Чимборасо. За целта върху разрез на Земята построяваме правоъгълен триъгълник с върхове в центъра на Земята, в най-високата точка на Чимборасо и на видимия от нея хоризонт в посока запад.



Отсечката **CH** е допирателна към земната повърхност и затова ъгълът при върха **H** е прав. Тогава, от правоъгълния триъгълник Δ**OCH** следва:

$$\frac{R}{R+h} = cos(\Delta\lambda)$$

$$\Delta\lambda = arccos\frac{R}{R+h}$$

$$\Delta\lambda_{rad} = 0.044298\ rad$$

$$\Delta\lambda = 2°\ 32'\ 17"$$

Освен това, разстоянието Δl, измервано по земната повърхност от точка с координатите на върха, но намираща се на морско ниво, до хоризонта, който се вижда от върха на Чимборасо, е равно на:

$$\Delta l = \Delta\lambda_{rad} \cdot R = 282.53\ km$$

По права линия от върха до хоризонта разстоянието е:

$$x = R \cdot tg(\Delta\lambda) = 282.71\ km$$

Виждаме, че независимо дали пресмятаме разстоянието по земната повърхност или по права линия от върха на Чимборасо към хоризонта, получаваме почти един и същ резултат. Това се дължи на факта, че ъгълът $\Delta\lambda$ е много малък, независимо от голямата височина на вулкана. (*Този разлика води до разлика в моментите на залеза по-малка от половин секунда.*) Разстоянието до хоризонта Δl е по-голямо от разстоянието Δl_S до градчето Пуерто Лопес. Следователно за наблюдател на вулкана Слънцето ще залязва по-късно, отколкото за наблюдател на брега на океана. Пръв ще види залеза наблюдател в градчето Пуерто Лопес.

При пресмятането на разликата в разстоянията поради това, че за наблюдателя от градчето не е дадена никаква информация, ще приемем, че неговият хоризонт практически съвпада с местоположението му. От разликата $\Delta l'$ между двете разстояния ще намерим разликата в моментите на залеза за двете точки от земната повърхност.

Разликата в разстоянията е:

$$\Delta l' = \Delta l - \Delta l_S = 63.53\ km$$

Разликата в географските дължини е:

$$\Delta\lambda' = \frac{\Delta l'}{R} = 0.0099608\, rad = 0°.57071 = 0°\,34'\,15''$$

Това води до разлика във времето на залеза:

$$\Delta t' = \frac{\Delta\lambda'}{15°}\, h = \frac{\Delta\lambda'}{15°} \cdot 60 \min = \frac{\Delta\lambda'}{15°} \cdot 3600 \sec = 2^m\, 17^s = 137^s$$

При числените пресмятания $\Delta\lambda'$ във всяка една от формулите е в градуси.

Формата на Земята е близка до ротационен елипсоид, при което екваториалният радиус е по-голям от полярния *с повече от 20 km*. Чимборасо е почти на екватора. Еверест е далеч от северния полюс, но е достатъчно далеч и от екватора. Разликата във височините от 2585m се оказва, очевидно, недостатъчна за да компенсира разликите на разстоянията до центъра на Земята на точките със същите координати, но намиращи се на морско ниво. *В крайна сметка се оказва, че Чимборасо е по-далеч от центъра на Земята с 2163 m.*

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилно пресмятане на момента време, в който настъпва местното пладне за наблюдател на върха на Чимборасо – 2 т.

За правилно пресмятане на разстоянието от Чимборасо до видимия хоризонт в западна посока – 3 т.

За правилен отговор на въпроса кой наблюдател пръв ще види залеза – 2 т.

За правилно пресмятане на разликата в моментите на залеза – 3т.

За правилен коментар относно отдалечеността на Чимборасо от центъра на Земята – 2т.

2 задача. 6969 Сантаро. Космически инженери от бъдещето планират да превърнат астероида 6969 Сантаро в складова база за презареждане с гориво на пилотирани мисии към Марс. Астероидът е част от Главния астероиден пояс и има орбита с голяма полуос 2.2 au (астрономически единици) и пренебрежимо малък ексцентрицитет. Вие имате задачата да направите предварителни проучвания.

- **А)** Каква звездна величина има астероидът за наблюдател, разположен на Земята, при противостоене? Неговата абсолютна звездна величина е $13^m.45$. Абсолютната звездна величина на обект от Слънчевата система е звездната величина, която той би имал при наблюдение от Слънцето, ако е отдалечен от Слънцето на 1 au.
- **Б)** Като приемете, че астероидът Сантаро има сферична форма и отражателна способност, близка до тази на Луната, намерете приблизително неговия размер. Радиусът на Луната е 1737 km, а нейната звездна величина в пълнолуние е -12.74^m.
- **В)** Какво е ускорението на свободно падане на повърхността на астероида? Типичната плътност за астероидите в Главния астероиден пояс е около 2 g/cm^3.

Решение:

А) Нека с E_0 да означим осветеността, която астероидът създава за наблюдател, разположен на Слънцето, при положение че разстоянието от астероида до Слънцето е $r_0 = 1$ au. Също така, нека с E означим осветеността, създавана от астероида за земен наблюдател, по време на противостоене. Радиусът на орбитата на астероида е r.

Осветеността, която Слънцето би създавало върху астероида, при разстояние r_0 е:

$$E' \sim \frac{1}{r_0^2}$$

Потокът лъчиста енергия (енергията за единица време), която Сантаро отразява във всички посоки, е пропорционална на неговата отражателна способност (албедо) A и площта на напречното му сечени е πR^2 (R е радиусът на астероида). Следователно, за осветеността E_0 можем да запишем следното:

$$E_0 \sim \frac{E'.A.R^2}{r_0^2} \sim \frac{A.R^2}{r_0^4}$$

Когато 6969 Сантаро е в противостоене спрямо Земята, разстоянието от него до земния наблюдател е $r - r_0$. Използвайки аналогични разсъждения, за осветеността E, създавана от астероида при противостоене, получаваме:

$$E \sim \frac{A.R^2}{r^2(r-r_0)^2}$$

Следователно, съотношението на двете осветености е:

$$\frac{E_0}{E} = \frac{r^2(r-r_0)^2}{r_0^4} \approx 7.$$

Ако m_0 е дадената ни абсолютна звездна величина на астероида, а m е търсената видима звездна величина на астероида при противостоене, то съгласно закона на Погсън:

$$\frac{E_0}{E} = 10^{0.4(m-m_0)}$$

Оттук намираме:

$$\mathbf{m} = m_0 + 2.5lg\left(\frac{E_0}{E}\right) \approx 15^m.6$$

Б) Нека с $m_Л$ да означим звездната величина на Луната в пълнолуние, а с $r_{ЗЛ}$ разстоянието между Земята и Луната. Също така с $R_Л$ означаваме лунния радиус.

Понеже радиусът на лунната орбита е много по-малък от 1 au, то можем да приемем, че Луната във фаза пълнолуние е практически на 1 au от Слънцето. Като използваме разсъжденията от предното подусловие, за осветеността, която Луната създава за земния наблюдател в пълнолуние, можем да запишем:

$$E_Л \sim \frac{A.R_Л^2}{r_0^2.r_{ЗЛ}^2}$$

Оттук намираме:

$$\frac{E_Л}{E_0} = \frac{r_0^2}{r_{ЗЛ}^2}\frac{R_Л^2}{R^2}.$$

От друга страна, съгласно закона на Погсън:

$$\frac{E_Л}{E_0} = 10^{0.2(m_0-m_Л)}$$

Откъдето следва и нашата оценка за радиуса на астероида**:**

$$R = R_Л\frac{r_0}{r_{ЗЛ}}.10^{0.2(m_Л-m_0)} \approx 4km$$

В) Ускорението на свободно падане на повърхността на астероида е:

$$a = \frac{G.M}{R^2}.$$

Тук M е масата на астероида. Можем да я изразим чрез неговата плътност ρ:

$$M = \frac{4}{3}\pi\rho R^3.$$

Като я заместим в израза за ускорението, получаваме:

$$a = \frac{4}{3}\pi G\rho R \approx 2{,}2.10^{-3} m/s^2$$

<u>Критерии за оценяване (общо 12т.):</u>

А) – 5т.

- за достигане до извода, че осветеността, която астероидът създава върху Слънцето е обратнопропорционална на 1 au на степен 4 – 2 т.

- за правилно изразяване на осветеността, която астероидът създава върху Земята в противостоене – 1 т.

- за правилно изразяване на съотношението между двете осветености, чрез закона на Погсън – 1 т.

- за правилен израз за търсената звездна величина и верен числен отговор – 1 т.

Б) – 5т.

- за изразяване на осветеността, която Луната създава в пълнолуние – 2 т.

- за правилна математическа постановка, чрез която се намира радиусът на астероида (коректно изпълнено сравнение и коректно използван закон на Погсън) – 2 т.

- за правилен краен израз и вярна стойност – 1т.

В) – 2т.

- за правилна формула за ускорението на свободно падане – 2 т.

- за правилно заместване на масата – 0.5 т.

- за верен числен отговор – 0.5 т.

3 задача. Теорема за вириала. Според теоремата за вириала, в стабилна гравитационно свързана система общата кинетична енергия E_k е ½ от общата потенциална енергия E_p по абсолютна стойност:

$$E_K/E_P = -\frac{1}{2}$$

Това отношение е същото както и при обект, който се движи по кръгова орбита около масивно тяло.

Скоростта на движение на Земята около Слънцето е 29.8 km/s.

А) Звезден куп с радиус 6 парсека се състои от звезди, които се движат една спрямо друга със средна скорост 20 km/s. Оценете приблизително масата на звездния куп, която е необходима, за да бъде той стабилен.

Б) В Местната група галактики, към която принадлежи нашият Млечен път, характерната скорост на движение на галактиките една спрямо друга е около 100 km/s. Почти всички галактики от местната група се намират в област от пространството с размер 2 мегапарсека. Оценете приблизително масата, включена в тази област от пространството.

В) На разстояние 35 килопарсека от центъра на галактиката Андромеда скоростта на движение на звездите и другите обекти относно нейния галактичен център е 227 km/s. Сравнете средната плътност на веществото, съдържащо се в област от галактиката Андромеда с радиус 35 килопарсека около нейния център, със средната плътност на веществото в област от Местната група с размер 2 мегапарсека, включваща Млечния път, галактиката Андромеда и техните галактики спътници. Намерете приблизително отношението на тези две плътности. Един парсек е равен на 206265 au (астрономически единици).

Решение: Общата гравитационна потенциална енергия на обектите в гравитационно свързана система с маса M и радиус R е от вида:

$$E_P = -\frac{kGM^2}{R}$$

Тук k е коефициент, който отчита разпределението на концентрацията на обектите по радиуса R. За сфера с равномерно разпределена плътност $k = 0.6$, но в повечето гравитационно свързани системи има увеличаване на концентрацията на материята с приближаване към центъра, така че $k > 0.6$. За оценките в тази задача ще използваме стойност на коефициента $k = 1$, но за добри ще се считат всички оценки, получени със стойности на този коефициент в интервала $0.5 < k < 3$.

Можем да получим $k = 1$ и ако направим приближението, че средното ефективно разстояние между два обекта в системата е $R/2$. Ако масата на всеки обект в системата е m, тогава средната потенциална енергия на връзката между два обекта е

$$\varepsilon_P = -\frac{2Gm^2}{R}$$

Общият брой връзки между N обекта е $N(N-1)/2 \approx N^2/2$. Сумираме потенциалните им енергии, заместваме с $M = Nm$ и получаваме:

$$E_P = \frac{N^2}{2}\varepsilon_P = -\frac{N^2Gm^2}{R} = -\frac{GM^2}{R}$$

От средноквадратичната скорост на обектите в купа v получаваме общата кинетична енергия

$$E_K = \frac{Mv^2}{2}$$

Прилагаме теоремата за вириала:

$$2E_K = -E_P$$

$$Mv^2 \approx -\frac{GM^2}{R}$$

Оттук получаваме оценката за масата на системата:

$$M \approx \frac{v^2R}{G}$$

За изчисленията е удобно да направим сравнение с кръговата орбитална скорост на Земята около Слънцето $v_0 = 29.8$ km/s. Ако радиусът на земната орбита е r, то за масата на Слънцето можем да напишем

$$M_S = \frac{{v_0}^2r}{G}$$

Разделяме двете последни формули почленно и получаваме:

$$\frac{M}{M_S} \approx \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 \cdot \frac{R}{r}$$

Като имаме предвид, че $r = 1$ au , а един парсек се равнява приблизително на 206265 au, то можем да получим формула, в която радиусът на системата R е в астрономически единици или в парсеци:

$$\frac{M}{M_S} \approx \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 R[\mathrm{au}] \approx 206265 \left(\frac{v}{v_0}\right)^2 R[\mathrm{pc}]$$

А) Заместваме в горната формула радиуса на звездния куп R_C = 6pc и средната скорост на звездите в него v_C = 20 km/s. За приблизителната маса на купа получаваме $M_C \approx 560\,000$ M_S. Тази стойност е характерна за силно концентриран кълбовиден звезден куп.

Б) Вместо радиуса във формулата заместваме с половината от дадения размер на Местната група галактики R_{LG} = 1 Mpc и характерната скорост на галактиките в тази група v_{LG} = 100 km/s. Получаваме приблизителната маса на Местната група галактики $M_{LG} \approx 2.3\times10^{12}$ M_S.

В) Заместваме с дадения радиус R_A = 35 kpc около центъра на галактиката Андромеда и скоростта на обектите v_A = 227 km/s. Получаваме приблизителната маса в радиус от 35 kpc около центъра на галактиката $M_A \approx 4.2\times10^{11}$ M_S.

Средната плътност на веществото в сфера с радиус R и маса M е:

$$\rho = \frac{3M}{4\pi R^3}$$

За отношението на плътността на веществото в рамките на 35 kpc около центъра на галактиката Андромеда към средната плътност в Местната група галактики намираме:

$$\frac{\rho_A}{\rho_{LG}} = \frac{M_A/M_{LG}}{(R_A/R_{LG})^3} \approx 4000$$

<u>Критерии за оценяване (общо 12 т.):</u>

За извеждане на формула за масата от теоремата на вириала – 7т.

За пресмятане на оценката за масата на звездния куп – 1 т.

За пресмятане на оценката за масата на Местната група галактики – 1 т.

За намиране на масата на веществото в радиус от 35 kpc около центъра на галактиката Андромеда – 1 т.

За пресмятане на отношението на плътността в тази област с плътността на веществото в Местната група галактики – 2 т.

4 задача. UY Scuti. Звездата UY Scuti е червен свръхгигант с температура 3365 K и абсолютна визуална звездна величина -6.2^m. В тази стойност е отчетено междузвездното поглъщане на светлината. Звездата се намира на 2900 парсека от нас.

- **А)** През 2012 г. чрез специални интерферометрични наблюдения е бил определен видимият ъглов радиус на UY Scuti. Получената стойност е 2.74 mas (milliarcseconds или хилядни от дъговата секунда). Пресметнете радиуса на звездата.

- **Б)** Ако поставим UY Scuti на мястото на Слънцето, кои планети биха се оказали вътре в нея? За наблюдател на най-близката планета, която ще бъде извън пределите на звездата, какъв би бил видимият ъглов диаметър на това свръх-слънце?

- **В)** Оценете светимостта на звездата UY Scuti в единици слънчеви светимости по два начина – първо, като използвате нейния видим радиус и температурата, а след това като използвате разстоянието до звездата и нейната абсолютна звездна величина. Предложете обяснение за разликата между получените оценки.

Разстояния от планетите до Слънцето в астрономически единици (1 au = 149.6×10^6 km)

Меркурий	Венера	Земя	Марс	Юпитер	Сатурн	Уран	Нептун
0.39	0.72	1	1.52	5.2	9.5	19.2	30

Някои данни за Слънцето

Абсолютна визуална звездна величина	Радиус	Температура
4.83^m	696 000 km	5778 K

Решение:

Дадено ни е разстоянието r до звездата UY Scuti, изразено в парсеци. От него лесно можем да пресметнем паралакса на звездата:

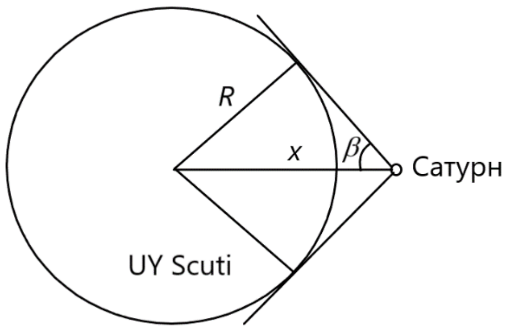
$$p = \frac{1}{r} \approx 0.0003448'' = 0.3448 \text{ mas}$$

Под такъв ъгъл от звездата на разстоянието до Слънцето се вижда една астрономическа единица. Но това означава, че за наблюдател от Земята под същия ъгъл се вижда отсечка от една астрономическа единица, намираща се при звездата UY Scuti и перпендикулярна на зрителния лъч. Следователно ако означим с α видимия ъглов радиус на звездата, то можем да намерим нейния линеен радиус в астрономически единици, а оттам и в километри, и в единици слънчеви радиуси R_0:

$$R = \frac{\alpha}{p} \approx 7.946 \text{ au} \approx 1.189 \times 10^9 \text{ km} \approx 1708 R_0$$

Сравняваме радиуса на звездата в астрономически единици с дадените в таблицата разстояния от планетите до Слънцето. Виждаме, че планетите Меркурий, Венера, Земя, Марс и Юпитер биха били погълнати от нея.

Радиусът на звездата е около 84% от разстоянието между Сатурн и Слънцето. Следователно, за да намерим видимия от Сатурн ъглов диаметър на звездата, ще трябва да си послужим с малко геометрични разглеждания.



Както се вижда от фигурата, видимият от Сатурн ъглов диаметър на звездата ще бъде равен на 2β. За ъгъла β можем да напишем:

$$\sin\beta = \frac{R}{x}$$

където x е разстоянието от Сатурн до Слънцето. Така получаваме:

$$\beta \approx 56.76°$$

Видимият ъглов диаметър на звездата за наблюдател от Сатурн ще бъде $2\beta = 113.5°$.

Означаваме с L и T светимостта и температурата на звездата, а с L_0 и T_0 светимостта и температурата на Слънцето. Тогава:

$$L = 4\pi R^2 \sigma T^4$$

$$L_0 = 4\pi {R_0}^2 \sigma {T_0}^4$$

където σ е константата на Стефан-Болцман. Разделяме почленно двете уравнения и намираме:

$$\frac{L}{L_0} = \left(\frac{R}{R_0}\right)^2 \cdot \left(\frac{T}{T_0}\right)^4$$

$$L \approx 335\,000 L_0$$

Можем да определим светимостта на звездата и като използваме нейната абсолютна звездна величина M. За целта по принцип е нужно да знаем разстоянието до звездата, но всъщност ние ще използваме абсолютната звездна величина на Слънцето M_0, която ни е дадена в таблицата. Съгласно формулата на Погсън можем да напишем:

$$\frac{L}{L_0} = 2.512^{M_0 - M}$$

$$L \approx 26\,000 L_0$$

По втория начин се получава много по-ниска светимост на звездата.

При пресмятанията си по първия начин ние използвахме температурата и радиуса на звездата. Така ние получихме оценка за нейната болометрична светимост – сумарната енергия, която звездата излъчва в целия електромагнитен спектър. Получената по втория начин оценка за светимостта се оказа много по-малка от първата. Причината е, че при пресмятанията ни по втория начин ние използвахме дадените ни визуални абсолютни звездни величини на звездата и на Слънцето – звездните величини само във видимата част от спектъра. Максимумът на излъчване на Слънцето е във видимата област на спектъра, като излъчването в ултравиолетовата и инфрачервената област участва с относително малък дял в общото енергетично излъчване в целия спектър. Но UY Scuti е червен свръхгигант. Нейната температура е значително по-ниска от тази на Слънцето и огромната част от нейното енергетично излъчване е в инфрачервени лъчи, които не се вземат предвид когато използваме визуалните звездни величини. Ето защо, пресмятайки по втория начин, когато се използва излъчването само в ограничен участък от спектъра, във видимата област, за червения свръхгигант получаваме съществено по-ниска светимост. Оттук заключаваме, че по-реалистична е оценката за светимостта на звездата, направена по първия начин. *Допълнителен фактор, определящ ниската светимост на звездата във видима светлина, вероятно е предполагаемата обширна прахова обвивка на U Scuti, която ефективно поглъща част от светлината във видимата област на спектъра.*

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За пресмятане на линейния радиус на звездата – 3 т.

За посочване на планетите, които биха се оказали вътре в звездата – 1 т.

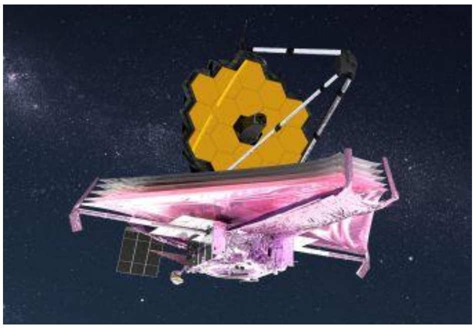
За определяне на видимия ъглов диаметър на звездата от първата планета, която ще бъде извън границите на звездата - 2 т.

За пресмятане на светимостта на звездата по първия начин – 2 т.

За пресмятане на светимостта по втория начин – 2 т.

За сравнение и обяснение на причината за разликата между двете оценки – 2 т.

5 задача. Телескопът James Webb.



Космическият телескоп James Webb (JWST) има площ на главното огледало 25.4 m^2. Камерата NIRCam на JWST е оборудвана с набор от филтри за наблюдения в близкия инфрачервен диапазон. Филтърът F277W пропуска инфрачервени вълни с дължина между 2.5 и 3.1 микрона (10^{-6} m).

Приемете, че за да се регистрира космически обект на фотографски кадър при 5-минутна експонация с този филтър, трябва в дадения спектрален интервал върху огледалото на телескопа да попада средно поне 1 фотон в секунда от обекта.

- **А)** Инфрачервен лазер, чието излъчване е с дължина на вълната 2.8 микрона, има мощност 1W. Лазерът произвежда леко разходящ конусовиден сноп лъчение с ъгъл при върха 1 дъгова минута. От какво максимално разстояние с телескопа James Webb може да се регистрира този лазер във филтър F277W на кадър с 5-минутна експонация?
- **Б)** Вега има звездна величина близка до 0^m и създава на Земята поток лъчиста енергия на единица площ 4.52×10^{-11} W/m^2 във филтъра F277W (пропускащ лъчение с дължини на вълните от 2.5 до 3.1 микрона). Каква ще бъде граничната звездна величина (звездната величина на най-слабите регистрирани звезди) върху кадър с 5-минутна експонация, получен с телескопа James Webb в този филтър?

Скоростта на светлината е 300 000 km/s.

Константата на Планк е $h = 6.63\times10^{-34}$ J.s.

Решение: Енергията на един фотон във вакуум е $\varepsilon = hc/\lambda$. В тази формула h е константата на Планк, c е скоростта на светлината, а λ е дължината на електромагнитната вълна.

При така зададеното условие, за се получи изображение на наблюдавания обект върху 5-минутен кадър с телескопа James Webb, необходимият лъчист поток, създаван от обекта, трябва да е равен на енергията на един фотон, разделена на времето τ = 1s и на площта S на главното огледало на телескопа

$$\Phi = \frac{\varepsilon}{S\tau}$$

А) Лазерът произвежда конусовиден сноп лъчение с ъгъл при върха $\alpha = 60''$. На разстояние r от върха напречното сечение на конуса с диаметър D има площ:

$$S_C = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4}\cdot(\alpha r)^2 = \frac{\pi}{4}\left(\frac{60''}{206265}r\right)^2$$

Тук се има предвид, че ъгълът α трябва да е в радиани, а в ъгъл от един радиан се съдържат 206265 дъгови секунди. Граничното условие, необходимо за да може лазерът с мощност P = 1W да бъде регистриран с телескопа, е следното:

$$\Phi = \frac{P}{S_C}$$

Заместваме с числените величини и получаваме:

$$\frac{\varepsilon}{S\tau} = \frac{4P}{\pi}\left(\frac{206265}{60}\right)^2\left(\frac{1}{r}\right)^2$$

$$r = \left(\frac{206265}{60}\right)\sqrt{\frac{4PS\lambda\tau}{\pi hc}} = 490 \text{ au}$$

Б) Средната дължина на вълната, пропускана от филтъра F277W, е $\lambda = 2.8$ µm. За фотони с такава дължина на вълната пресмятаме минималния поток лъчиста енергия, който е необходим, за да бъде получена фотография на звезда върху 5-минутен кадър:

$$\Phi = \frac{hc}{\lambda S\tau} = 2.8 \times 10^{-21} \text{ W/m}^2$$

За да намерим граничната звездна величина на звездата m, прилагаме закона на Погсън, като правим сравнение с Вега ($m_V = 0$, $\Phi_V = 4.52\times10^{-11}$ W/m^2):

$$m - m_V = -2.5 \lg\left(\frac{\Phi}{\Phi_V}\right)$$

Получаваме гранична звездна величина $m = 25.5^{\mathrm{m}}$.

<u>Критерии за оценяване (общо 12 т.):</u>
За определяне на максималното разстояние до лазера – 5 т.
За правилен числен резултат – 1 т.
За определяне на граничната звездна величина – 5 т.
За правилен числен резултат – 1 т.

Справочни данни, които могат да се използват за всички задачи:

Екваториален радиус на Земята	6 378 km
Гравитационна константа	$G = 6.67\times10^{-11}$ m^3/kg.s^2
Разстояние от Земята до Луната	384400 km
Астрономическа единица	1au = 149.6×10^6 km.