МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, НАЦИОНАЛЕН КРЪГ, 9 май 2021 г.
Тема за 8. клас (втора състезателна група)
Решения и указания

Задача 1. Кинематика и динамика

Част А. Ще приемем, че влакът се движи с постоянно ускорение a. Тогава дължината на предпоследния вагон се дава с израза

$$l = \frac{a(\tau + t_1)^2}{2} - \frac{a\tau^2}{2} = \frac{a}{2}(t_1^2 + 2t_1\tau). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Последният вагон се движи равноускорително с начална скорост $\upsilon_0 = a(\tau + t_1)$.**[0,5 т.]**

В този случай дължината на вагона може да се запише във вида

$$l = \upsilon_0 t_2 + \frac{at_2^2}{2} = \frac{a}{2}(t_2^2 + 2t_1t_2 + 2t_2\tau). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тъй като в горните изрази левите страни са равни, от приравняването на десните страни имаме

$$t_1^2 + 2t_1\tau = t_2^2 + 2t_1t_2 + 2t_2\tau, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

откъдето намираме

$$\tau = \frac{t_2^2 + 2t_1t_2 - t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = \frac{(t_1 + t_2)^2 - 2t_1^2}{2(t_1 - t_2)} = 3{,}5\ \text{s}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част Б. а) Хоризонталната част на въжето има маса $m_1 = m(x/l)$ **[0,5 т.]** , а вертикалната – маса $m_2 = m(1 - x/l)$ **[0,5 т.]**. Тогава уравненията на движение са

$$m_1 a = T(x), \qquad m_2 a = m_2 g - T(x). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Като умножим първото уравнение с m_2, а второто с m_1 и ги извадим почленно, намираме

$$T(x) = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g = mg\left(\frac{x}{l}\right)\left(1 - \frac{x}{l}\right). \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) Стойността на $T(x)$ зависи от стойността на израза $z - z^2$, където сме означили $z = x/l$. Като отделим пълен квадрат, можем да препишем израза във вида

$$z - z^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left[\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right)z + z^2\right] = \frac{1}{4} - \left(z - \frac{1}{2}\right)^2, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

откъдето намираме

$$T_{\max} = T(z = 1/2) = \frac{mg}{4}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

в) За да не се скъса въжето, трябва да е изпълнено условието

$$T \le T_0 = mg\frac{l_0}{l}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Като положим $T = T_{\max}$ имаме неравенството

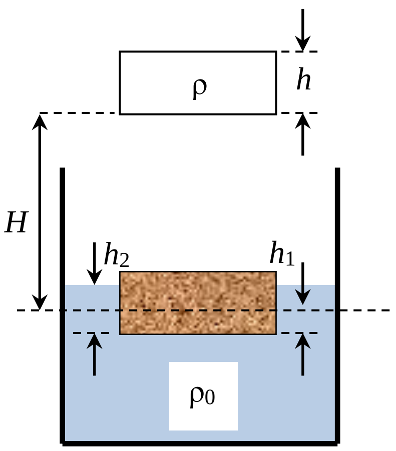
$$\frac{mg}{4} \le mg\frac{l_0}{l},$$ **[0,5 т.]**

откъдето следва

$$l_{\max} = 4l_0.$$ **[0,5 т.]**

Задача 2. Преобразуване на енергията

Ще означим първоначалната височина на течността над долната основа на плаващата тапа с h_1, а крайната височина на течността спрямо долната основа на плаващата тапа с h_2 (фиг. 1)**[0,5 т.]**. Като изберем за нулево ниво положението на



Фиг. 1

долната основа, когато тапата плава в течността, началната потенциална енергия на тапата е

$$E_{1,\text{тапа}} = mg\left(\frac{h}{2} + H + h_1\right),$$ **[1 т.]**

а на течността –

$$E_{1,\text{течност}} = E_0 + m_0 g\frac{h_1}{2},$$ **[1 т.]**

където E_0 е потенциалната енергия на част от течността, която не променя положението си при падане на тапата, а m_0 е масата на течността, която се намира над отчетното ниво. Следователно общата начална енергия на системата е

$$E_1 = E_{1,\text{тапа}} + E_{1,\text{течност}} = mg\left(\frac{h}{2} + H + h_1\right) + E_0 + m_0 g\frac{h_1}{2}.$$ **[0,5 т.]**

След като тапата падне в течността и спре да се движи, потенциалната ѝ енергия е

$$E_{2,\text{тапа}} = mg\frac{h}{2},$$ **[1 т.]**

а потенциалната енергия на течността включва две съставящи – едната E_0 на течността под дъното на плаващата тапа, а другата над това ниво. Тази част с маса m_0 заема слой с височина h_2. Следователно имаме

$$E_{2,\text{течност}} = E_0 + m_0 g\frac{h_2}{2}.$$ **[1 т.]**

Тогава намираме

$$E_2 = E_{2,\text{тапа}} + E_{2,\text{течност}} = mg\frac{h}{2} + E_0 + m_0 g\frac{h_2}{2}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Следователно имаме

$$E_1 - E_2 = mg(H + h_1) - m_0 g\frac{h_2 - h_1}{2}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тъй като $m = \rho sh$ **[0,5 т.]**, $m_0 = \rho_0 S h_1 = \rho_0 (S - s) h_2$ **[0,5 т.]**, а така също от условието за плаване на тапата $\rho h = \rho_0 h_2$ **[0,5 т.]**, определяме

$$h_1 = \frac{\rho}{\rho_0}\left(1 - \frac{s}{S}\right)h, \qquad h_2 = \frac{\rho}{\rho_0}h. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

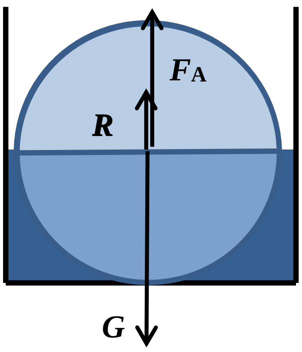
След като заместим, намираме

$$E_1 - E_2 = \rho g s h\left[H + \frac{\rho}{2\rho_0}\left(1 - \frac{s}{S}\right)h\right]. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тъй като $E_1 - E_2 > 0$, част от началната механична енергия се е трансформирала в друг вид енергия. **[0,5 т.]**

Задача 3. Статика на флуиди

Част А. а) На кълбото действат три сили – силата на тежестта $G = mg$ (вертикално надолу), архимедовата сила $F_A = \rho_0 Vg/2$ и реакцията на опората R (вертикално нагоре). На фиг. 2 са показани действащите сили. **[1,5 т.]**



Фиг. 2

б) Тъй като кълбото е неподвижно, резултантната сила е равна на нула, т. е.

$$R + F_A - G = 0. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

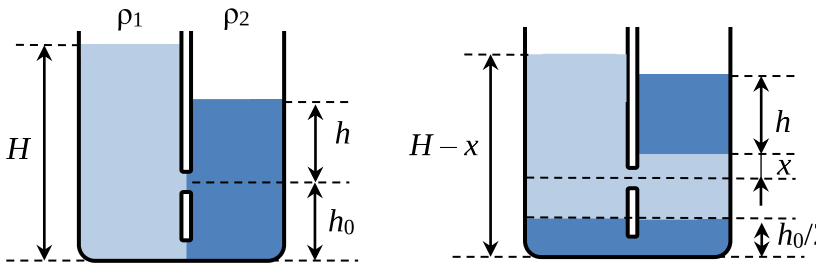
Като отчетем, че масата на кълбото е $m = \rho V$ **[0,25 т.]** и силата на реакция $R = N = mg/3$ **[0,5 т.]** (от третия закон на Нютон), можем да заместим в горното равенство

$$\frac{1}{3}\rho Vg + \rho_0\frac{V}{2}g - \rho Vg = 0. \qquad \textbf{[0,25 т.]}$$

След като съкратим на Vg, намираме

$$\rho = \frac{3}{4}\rho_0 \approx 0,75\ \text{g/cm}^3. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част Б. а) През отвора на височина h_0 течността от лявото коляно започва да преминава в дясното, защото на това ниво хидростатичното налягане в лявото коляно е по-голямо от това в дясното. **[0,5 т.]** Течността 1 разкъсва течността 2 в дясното коляно, като понижава нивото на долната част и повишава нивото на горната част (вж. фиг. 3). **[0,5 т.]** Тъй като при равновесие налягането на ниво h_0 е едно и също в двете



Фиг. 3

колена, в долната част на колената течностите ще се разположат по един и същ начин. **[1 т.]** В лявото коляно ще навлиза течност 2, докато достигне нивото $h_0/2$, като в дясното коляно течността 2 ще има същото ниво. По такъв начин нивото в дясното коляно ще се повиши с x, с колкото нивото в лявото коляно ще се понижи. **[1 т.]**

б) Ще означим дебелината на слоя течност 2 над отвора преди протичането с h, а височината на стълба течност 1 в лявото коляно преди протичането с H. От равенството на налягания в долната част на тръбата имаме

$$(h+h_0)\rho_2 = H\rho_1, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

след като сме съкратили на g. От друга страна, от равенството на хидростатичното налягане на нивото на отвора в двете колена след достигане на новото равновесие, намираме

$$h\rho_2 + x\rho_1 = (H - x - h_0)\rho_1. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Като изразим от първото равенство

$$h = H\frac{\rho_1}{\rho_2} - h_0$$

и заместим във второто, определяме

$$x = \frac{h_0}{2}\left(\frac{\rho_2}{\rho_1} - 1\right). \qquad \textbf{[1 т.]}$$