МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, ОБЛАСТЕН КРЪГ, 20 февруари 2021 г.
Решения на темата за 12. клас (шеста състезателна група)

Задача 1. Потъване

а) На повърхността на водата тялото е в равновесие, следователно силата на тежестта му се уравновесява с действащата му Архимедова сила. Нека бележим целия обем на тялото с V, а обема на потопената му част с $V_{\text{п}}$. Тъй като $mg = \rho_{\text{В}} V_{\text{п}} g$ **[1 т.]** и $V = V_0 + \frac{m}{\rho}$ **[1 т.]**, то $x = \frac{V_{\text{п}}}{V} = \frac{\frac{m}{\rho_{\text{В}}}}{V_0 + \frac{m}{\rho}}$. **[1 т.]**

б) Когато налягането нарасне с Δp, обемът на въздушната кухина в тялото ще се намали до $V_{\Delta p}$. Тъй като свиването е изотермно, то $p_0 V_0 = (p_0 + \Delta p) V_{\Delta p}$. **[1 т.]** Тъй като тогава тялото се потапя изцяло, то $x = \frac{\frac{m}{\rho_{\text{В}}}}{V_{\Delta p} + \frac{m}{\rho}} = 1$. **[1 т.]** Следователно $V_{\Delta p} = m\left(\frac{1}{\rho_{\text{В}}} - \frac{1}{\rho}\right)$ и $\Delta p = \frac{p_0 V_0}{V_{\Delta p}} - p_0 = p_0\left(\frac{V_0}{V_{\Delta p}} - 1\right) = p_0\left(\frac{V_0}{m\left(\frac{1}{\rho_{\text{В}}} - \frac{1}{\rho}\right)} - 1\right)$. **[1 т.]**

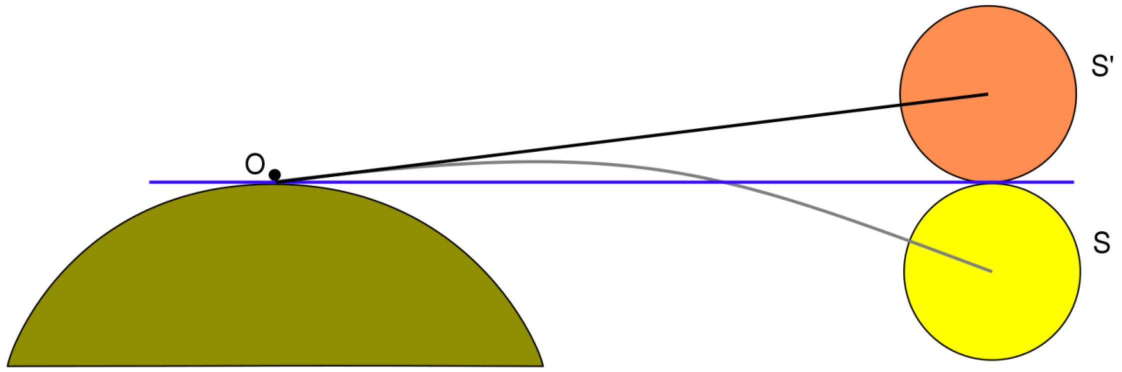
в) Ако тялото се потопи на дълбочина H, там налягането ще нарасне допълнително с $\rho_{\text{В}} g H$. Ако външното налягане се възстанови до p_0, то тялото (и въздушната кухина в него) ще бъде под налягане $p_0 + \rho_{\text{В}} g H$. Ако $\rho_{\text{В}} g H$ стане равно на Δp, на тази дълбочина тялото ще има неутрална плаваемост. На по-голяма дълбочина обемът на въздушната кухина ще намалее още, силата на тежестта ще стане по-голяма от Архимедовата сила и тялото ще потъва необратимо. **[1 т.]** Следователно $\rho_{\text{В}} g H = \Delta p$, откъдето $H = \frac{\Delta p}{\rho_{\text{В}} g} = \frac{p_0}{\rho_{\text{В}} g}\left(\frac{V_0}{m\left(\frac{1}{\rho_{\text{В}}} - \frac{1}{\rho}\right)} - 1\right)$. **[1 т.]**

г) При дадените стойности $x = \frac{\frac{m}{\rho_{\text{В}}}}{V_0 + \frac{m}{\rho}} = \frac{1}{\rho_{\text{В}}\left(\frac{V_0}{m} + \frac{1}{\rho}\right)} = \frac{1}{10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\left(\frac{4.10^{-6}\text{m}^3}{10^{-2}\text{kg}} + \frac{1}{1250\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right)} = \frac{5}{6} \approx 0.83$. **[0.8 т.]**, $\Delta p = p_0\left(\frac{V_0}{m\left(\frac{1}{\rho_{\text{В}}} - \frac{1}{\rho}\right)} - 1\right) = 10^5 Pa\left(\frac{4.10^{-6}\text{m}^3}{10^{-2}\text{kg}\left(\frac{1}{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}} - \frac{1}{1250\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}}\right)} - 1\right) = 1{,}00.10^5\text{Pa}$. **[0.7 т.]**, $H = \frac{\Delta p}{\rho_{\text{В}} g} = \frac{1{,}00.10^5\text{Pa}}{1000\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}.10\frac{\text{m}}{\text{s}^2}} = 10{,}0\ \text{m}$. **[0.5 т.]**

Задача 2. Оптика на атмосферата.

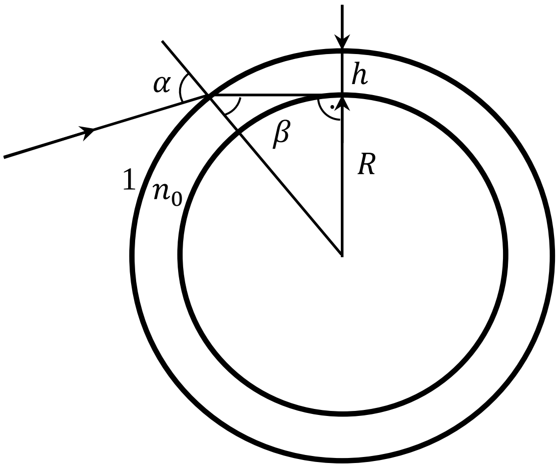
а) Тъй като показателят на пречупване на вакуума е точно 1 (по определение), а показателят на пречупване на въздуха близо до земната повърхност е $n_0 = 1{,}000273$, то при навлизане на слънчев лъч в атмосферата, заради пречупването ъгълът на пречупване (мерен спрямо вертикалата) постоянно ще намалява. Това ще доведе до криволинейна траектория на лъча. Тъй като човешкото око проектира образа по направление на пристигащия лъч, Слънцето ще се наблюдава малко по-високо (спрямо хоризонта), отколкото е в действителност, т.е. ще се наблюдава и за кратко след като

всъщност вече е под хоризонта. Тъй като това ще доведе до по-ранен изгрев и по-късен залез, продължителността на деня ще нарасне. **[2 т.]**
Примерна картинка: **[2 т.]**



б) Нека атмосферата е съставена от N слоя с показатели на пречупване n_i. На границата на два съседни слоя от законите на Снелиус следва $\frac{\sin\alpha_k}{\sin\alpha_{k+1}} = \frac{n_{k+1}}{n_k}$. Тъй като това ще е вярно за всеки два съседни слоя, то за всички слоеве $\sin\alpha_i . n_i = const$. Нека светлинен лъч идва от открития космос, хлъзгайки се (т.е. ъгълът на падане е 90°). Той ще достигне земната повърхност под ъгъл на падане β. Следователно източникът на този лъч ще се наблюдава повдигнат спрямо хоризонта на ъгъл $90° - \beta$. Тъй като $\sin 90^{\circ} . 1 = \sin\beta . n_0$, то $\sin\beta = \frac{1}{n_0}$, $\sin\beta = \frac{1}{1{,}000273}$, $\beta \approx 88{,}66°$. Следователно удължаването на деня е $\Delta t = \frac{2(90°-\beta)}{360°} . 24.60$ мин $\approx 10{,}7$ мин. **[3 т.]**

в) Нека светлинен лъч пристига на земната повърхност хоризонтално. Тогава той се е пречупил на „границата“ на земната атмосфера на височина h под ъгъл β. От образувания правоъгълен триъгълник с катет R и хипотенуза $R + h$ следва, че $\sin\beta = \frac{R}{R+h}$. Тогава той е пристигнал до тази граница с ъгъл на падане α, такъв че $\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_0$. Източникът на този лъч ще е повдигнат на ъгъл $\varphi = \alpha - \beta$. Изчислявайки техните стойности $\beta \approx 87{,}137°$, $\alpha = 87{,}469°$, $\varphi = 0{,}332°$, $\Delta t = \frac{2\varphi}{360°} . 24.60$ мин $\approx 2{,}66$ мин. **[3 т.]**



<u>Задача 3.</u> Еластичен удар. (две независими подзадачи)

Част 1.
а) От закона за запазване на импулса следва, че $m_1 v_1 = m_1 u_1 + m_2 u_2$. (1) **[0.5 т.]** При идеално еластичен удар механичната енергия се запазва: $\frac{m_1 {v_1}^2}{2} = \frac{m_1 {u_1}^2}{2} + \frac{m_2 {u_2}^2}{2}$. (2) **[0.5 т.]** След изразяване на u_1 от (1) $u_1 = v_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2$ (3) и заместване в (2) се получава $m_1 {v_1}^2 = m_1 \left(v_1 - \frac{m_2}{m_1} u_2\right)^2 + m_2 {u_2}^2$. (4) **[0.5 т.]** След опростяването на (4), $u_2 = \frac{2 m_1 v_1}{m_1 + m_2}$. (5) **[1 т.]** След заместване в (3) $u_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1$. (6) **[1 т.]**

б) При $m_1 \gg m_2$, $u_1 \approx v_1$ **[0.25 т.]** $u_2 \approx 2v_1$ **[0.25 т.]**. При $m_1 = m_2$, $u_1 = 0$ **[0.25 т.]** $u_2 = v_1$ **[0.25 т.]**. При $m_1 \ll m_2$, $u_1 \approx -v_1$ **[0.25 т.]** $u_2 \approx 0$ **[0.25 т.]**.

Част 2.

в) Нека тялото с маса M се удря със скорост v в повърхността. При идеално еластичен удар то отскача със същата скорост нагоре. Така двете тела се удрят помежду си с еднаква по големина скорост v (защото падат от една и съща височина), но с противоположни посоки. **[0.5 т.]** От закона за запазване на импулса следва, че $Mv - mv = Mu_M + mu_m$ (7) (за положителна посока е избрана посоката нагоре). **[0.5 т.]** При идеално еластичен удар механичната енергия се запазва: $\frac{Mv^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{Mu_M{}^2}{2} + \frac{mu_m{}^2}{2}$. (8) **[0.5 т.]** Чрез директно заместване на едната неизвестна скорост от (7) в (8) се получава сравнително голям за рационализиране израз. В случая по-лесно може да се намерят неизвестните скорости, ако се използва симетрията на уравненията. (7) може да се представи във вида $M(v - u_M) = m(v + u_m)$ (9). (8) може да се представи във вида $M(v - u_M)(v + u_M) = m(v + u_m)(-v + u_m)$ (10). Замествайки (9) в (10), $u_m = 2v + u_M$ (11). Замествайки (11) в (9), $u_M = \frac{M-3m}{M+m}v$ (12). **[0.75 т.]** Замествайки (12) в (11), $u_m = \frac{3M-m}{M+m}v$ (13). **[0.75 т.]**

г) От закона за запазване на механичната енергия следва, че при падане на тяло от височина h , $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ (14), където v е скоростта на достигане на повърхността. От (14) $v = \sqrt{2gh}$ (15). Следователно височината H, на която ще се издигне топчето с масата m, е $H = \frac{u_m{}^2}{2g} = \left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2 \frac{v^2}{2g} = \left(\frac{3M-m}{M+m}\right)^2 h$ (16). **[1 т.]**

д) В случая $M \gg m$, от (16) се получава $H \approx 9h$. **[1 т.]**