МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА, НАЦИОНАЛЕН КРЪГ
28 юни 2020 г., РУСЕ
Решения и критерии за оценяване на темата за V състезателна група
(11. – 12. клас)

Задача 1. Хари Потър играе магьосническата игра "куидич"

(a) На фиг. 1 е начертана координатна система. Очевидно

$x = v_0 t\ \cos\alpha$ (0.5 т.) (1)

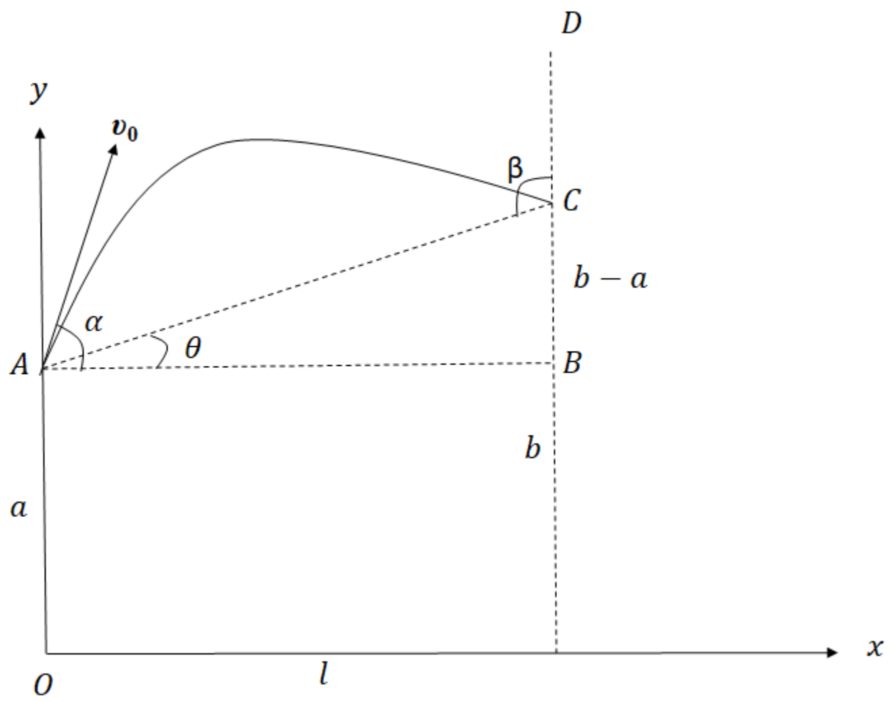
$y = a + v_0 t \sin\alpha - gt^2/2$ (0.5 т.) (2)

$v_x = v_{0x} = v_0 \cos\alpha$ (0.5 т.) (3)

$v_y = v_{0y} - gt = v_0 \sin\alpha - gt$ (0.5 т.) (4)

(b) Лесно изразяваме времето t от (1) и замествайки в (2), получаваме уравнението на траекторията:

$y = a + x\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\alpha}$ (2 т.) (5)



Фиг. 1

След като имаме уравнението на траекторията, знаейки че топката е попаднала при Фред, тогава $x=l$ и $y=b$ удовлетворяват това уравнение, т.е.

$$b = a + l\,\mathrm{tg}\,\alpha - \frac{gl^2}{2v_0^2\cos^2\alpha} \qquad (6)$$

Оттук намираме v_0:

$$v_0 = \sqrt{\frac{gl^2}{2\cos^2\alpha(a-b+l\,\mathrm{tg}\,\alpha)}} \text{ (2 т.)} \qquad (7)$$

(c) Полученият израз в Ур. (7) има минимум, когато знаменателят му има максимум. Функцията

$$f(\alpha) = 2\cos^2\alpha\,(a - b + l\,\mathrm{tg}\,\alpha)$$

може лесно да се опрости във вида $A\ \sin(x) - B\cos(x)$. С малко тригонометрични преобразувания имаме:

$$f(\alpha) = l\sin 2\alpha - (b-a)\cos 2\alpha - (b-a). \qquad \text{(2 т.)} \qquad (8)$$

Използвайки упътването, горната функция се пренаписва във вида:

$$f(\alpha) = \sqrt{l^2+(b-a)^2}\left[\frac{l}{\sqrt{l^2+(b-a)^2}}\sin 2\alpha - \frac{b-a}{\sqrt{l^2+(b-a)^2}}\cos 2\alpha\right] - \frac{b-a}{2} \qquad (9)$$

И ако положим за острия ъгъл θ:

$$\mathrm{tg}\,\theta = \frac{b-a}{l}$$

Получаваме:

$$f(\alpha) = \sqrt{l^2+(b-a)^2}\sin(2\alpha-\theta) - (b-a)$$

Очевидно е, че максимумът на $f(\alpha)$ се постига когато

$$\sin(2\alpha_0 - \theta) = 1 \text{ (1 т.)} \qquad (10)$$

Тогава

$$f(\alpha_0) = \sqrt{l^2+(b-a)^2} - (b-a)$$

и за минималната начална скорост, с която Хари Потър трябва да хвърли топката към Фред, така че тя да попадне точно при него, получаваме:

$$v_{0,min} = \sqrt{g(\sqrt{l^2+(b-a)^2} - a + b)} \text{ (1 т.)} \qquad (11)$$

(d) От Ур. (10) получаваме

$$\alpha_0 = \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} \text{(1 т.)} \qquad (12)$$

От Фиг. 1 обаче, веднага се вижда, че

$\beta = \frac{\pi}{2} + \theta$ (1 т.) (13)

и оттук

$\alpha_0 = \frac{\beta}{2}$ (1 т.), което трябваше да се докаже. (14)

(е) Ако $b = a,\ \theta = 0$ (1 т.) (15)

и тогава от Ур. (12) получаваме

$\alpha = \frac{\pi}{4}$ (1 т) (16)

Задача 2. Трептене на варел

а) Тъй като стените на варела са тънки, няма да действа архимедова сила. **[0,5 т.]** В равновесие силата на тежестта, действаща на варела, се уравновесява от разликата в наляганията на въздуха вътре и извън варела: $mg = (p - p_0)S$. **[0,5 т.]** Оттук $p = p_0 + \frac{mg}{S} = 102$ kPa. **[1 т.]**

б) При пускането на варела във водата и след установяване на термодинамично равновесие температурата на въздуха във варела е една и съща, т.е. може да използваме закона на Бойл–Мариот за изотермен процес: $p_0 S\ell = pS(\ell - x)$. **[1 т.]** Следователно $x = \frac{p-p_0}{p}\ell = \frac{mg}{mg+p_0 S}\ell \approx 2$ cm. **[1 т.]**

в) Дълбочината на потапяне на варела се определя от изискването да има едно и също налягане на равнището на отвора на варела – както под варела, така и извън него. Оттук $p + \rho g x = p_0 + \rho g y$ **[1 т.]** и $y = x + \frac{p-p_0}{\rho g} = \frac{mg\ell}{mg+p_0 S} + \frac{m}{\rho S} \approx 22$ cm **[1 т.]**.

г) Разглеждаме малко отклонение на варела от равновесното му положение, изразено чрез допълнително потапяне $\Delta y \ll y$ на варела. По този начин във варела навлиза още вода и нейната височина става $x + \Delta x$. Налягането на въздуха във варела нараства до $p + \Delta p$. От условието за едно и също налягане на равнището на отвора на варела следва, че $p + \Delta p + \rho g x + \rho g \Delta x = p_0 + \rho g y + \rho g \Delta y$. **[0,5 т.]** Оттук $\Delta p + \rho g \Delta x = \rho g \Delta y$. **[0,5 т.]** От друга страна, тъй като топлообменът може да се пренебрегне, нека да използваме уравнението на състоянието при адиабатен процес: $p[S(\ell - x)]^{7/5} = (p + \Delta p)[S(\ell - x - \Delta x)]^{7/5}$. **[0,5 т.]** Като използваме, че $\Delta x \ll \ell - x$ и $\Delta p \ll p$, ще получим: $(p + \Delta p)[S(\ell - x - \Delta x)]^{7/5} = (p + \Delta p)[S(\ell - x)]^{7/5}\left(1 - \frac{\Delta x}{\ell - x}\right)^{7/5} \approx (p + \Delta p)[S(\ell - x)]^{7/5}\left(1 - \frac{7}{5}\frac{\Delta x}{\ell - x}\right) \approx p[S(\ell - x)]^{7/5} + \Delta p[S(\ell - x)]^{7/5} - \frac{7}{5}\frac{\Delta x}{\ell - x}p[S(\ell - x)]^{7/5}$. **[1 т.]** Оттук $\Delta p \approx \frac{7}{5}\frac{\Delta x}{\ell - x}p$. **[0,5 т.]** Следователно $\Delta p \approx \frac{7\rho g \Delta y}{7p + 5\rho g(\ell - x)}p$. **[1 т.]** При отклонението на варела от равновесното му положение се поражда сила с големина $(\Delta p)S \approx \frac{7\rho g p S}{7p + 5\rho g(\ell - x)}\Delta y$, т.е. пропорционална на отклонението на варела, и обратна по посока, което означава, че силата е квазиеластична. **[0,5 т.]** Периодът на малките вертикални трептения е $T = 2\pi\sqrt{\frac{m[7p+5\rho g(\ell-x)]}{7\rho gpS}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho gS}\left[1+\frac{5}{7}\frac{\rho g\ell}{p_0\left(1+\frac{mg}{p_0S}\right)^2}\right]} \approx 0{,}92$ s. **[1,5 т.]**

д) При потапянето на варела под повърхността на морето в него навлиза още вода, чиято височина става $x' > x$. Налягането на въздуха във варела се увеличава до $p' = p_0 + \rho g(\ell - x')$. **[0,5 т.]** При термодинамично равновесие с морската вода отново може да използваме закона за изотермен процес: $p_0 S\ell = p'S(\ell - x')$. **[0,5 т.]** Следователно, получаваме квадратно уравнение за p': $p'^2 - p_0 p' - \rho g\ell p_0 = 0$. **[0,5 т.]** Положителният корен на уравнението е $p' = \frac{1}{2}\left(p_0 + \sqrt{p_0^2 + 4\rho g\ell p_0}\right)$. **[0,5 т.]** Оттук получаваме търсената сила $F = (p' - p)S = \frac{p_0 S}{2}\left(\sqrt{1+\frac{4\rho g\ell}{p_0}} - 1\right) - mg \approx 3{,}6$ kN. **[1 т.]**

Задача 3. Светодиод

а) Мощността на излъчената светлина е равна на мощността на електричния ток през светодиода:

(1) $$P = U_\text{р} I, \qquad \textbf{0,5 т}$$

откъдето определяме тока, който тече във веригата:

(2) $$I = \frac{P}{U_\text{р}} = 20 \text{ mA}. \qquad \textbf{0,5 т}$$

Тъй като резисторът и диодът са свързани последователно, сумата от напреженията върху тях е равна на ЕДН на източника:

(3) $$U_\text{р} + IR = \mathcal{E}, \qquad \textbf{1,0 т}$$

откъдето намираме съпротивлението на резистора:

(4) $$R = \frac{\mathcal{E} - U_\text{р}}{I} = \frac{4{,}5\text{ V} - 2{,}5\text{ V}}{0{,}02\text{ A}} = 100\ \Omega \qquad \textbf{1,0 т}$$

Пълната енергия, която се отделя във веригата за единица време е равна на мощността на електродвижещите сили в източника:

(5) $$P_\text{ЕДС} = \mathcal{E} I. \qquad \textbf{1,0 т}$$

Следователно КПД на веригата е:

(6) $$\eta = \frac{P}{P_\text{ЕДС}} = \frac{U_\text{р}}{\mathcal{E}} \approx 56\%. \qquad \textbf{1,0 т}$$

б) Диодът излъчва светлина, докато напрежението върху кондензатора намалее до $U_\text{р}$. Следователно по време на излъчването през диода минава заряд:

(7) $$q = C(U_0 - U_\text{р}). \qquad \textbf{1,0 т}$$

Енергията, излъчена под формата на светлина, е равна на работата на тока през диода:

(8) $$E = qU_\text{р} = C(U_0 - U_\text{р})U_\text{р} = 2.10^{-4}\text{ F} \,.\, 2\text{ V} \,.\, 3\text{ V} = 1{,}2.10^{-3}\text{ J} = 1{,}2\text{ mJ}. \qquad \textbf{1,0 т}$$

След това кондензаторът продължава да се разрежда, макар и много по-бавно, поради слабия ток, който протича през диода при $U < U_0$. Тогава обаче в диода се отделя енергия само под формата на топлина. Следователно общата енергия, отделена във веригата е равна на началната електрична потенциална енергия на кондензатора:

(9) $$W = \frac{1}{2} C U_0^2.$$ **1,0 т**

Оттук определяме КПД на светкавицата:

(10) $$\eta = \frac{E}{W} = 2\frac{U_\mathrm{p}}{U_0}\left(1 - \frac{U_\mathrm{p}}{U_0}\right) = 48\%.$$ **1,0 т**

От получения израз за η следва, че КПД на светкавицата има максимална стойност $1/2$, когато $U_\mathrm{p}/U_0 = 1/2$, т.е. при $U_0 = 2U_\mathrm{p} = 6$ V. **1,0 т**

в) Нека разгледаме лъч, излъчен от източника S под малък ъгъл θ с оста на цилиндъра. Той пада върху сферичната повърхност в т. M на разстояние:

(11) $$h \approx f \sin\theta$$ **0,5 т**

от оптичната ос, защото $|SM| \approx f$. Тъй като след пречупване от сферичната повърхност лъчът продължава успоредно на оста, следва че за ъгъла β на пречупване във въздуха е в сила:

(12) $$\sin\beta = \frac{h}{|OM|} = \frac{h}{R} \approx \frac{f\sin\theta}{R}$$ **0,5 т**

От чертежа се вижда, че ъгълът на падане в пластмасата е:

(13) $$\alpha = \beta - \theta \approx \left(\frac{f}{R} - 1\right)\theta,$$ **1,0 т**

където сме взели предвид, че за малки ъгли $\sin\theta \approx \theta$. От закона на Снелиус следва:

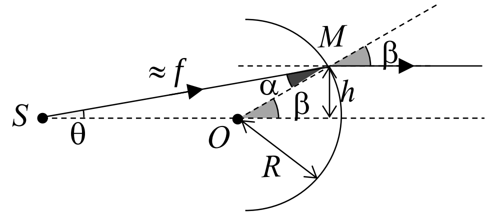
(14) $$n \sin\alpha = \sin\beta.$$ **1,0 т**

Като използваме уравненията (12) и (13) и приближнието за малки ъгли, получаваме:

(15) $$n\left(\frac{f}{R} - 1\right)\theta = \frac{f}{R}\theta,$$ **1,0 т**

откъдето окончателно намираме:

(16) $$f = \frac{nR}{n-1} = 3.0\,R.$$ **1,0 т**



Задача 4. Физика и техника на ниските температури

а) Тъй като студеното тяло излъчва като абсолютно черно тяло, излъчената от него енергия за единица време от единица площ по закона на Стефан-Болцман е $\frac{\Delta E_L}{\Delta S \Delta t} = \sigma {T_L}^4$. В същото време то получава излъчената енергия от по-топлото тяло $\frac{\Delta E_H}{\Delta S \Delta t} = \sigma {T_H}^4$. Следователно $S(0) = \sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)$. **[1 т.]** При наличие на топлинни екрани, тъй като температурата на k-ия екран не се променя, то колкото енергия излъчва, толкова трябва и да получава, следователно $2\sigma {T_k}^4 = \sigma {T_{k-1}}^4 + \sigma {T_{k+1}}^4$, или $\sigma\left({T_{k-1}}^4 - {T_k}^4\right) = \sigma\left({T_k}^4 - {T_{k+1}}^4\right)$. Тъй като това може да се напише за всеки екран, то $\sigma\left({T_H}^4 - {T_1}^4\right) = \sigma\left({T_1}^4 - {T_2}^4\right) = \cdots = \sigma\left({T_N}^4 - {T_L}^4\right)$. **[1 т.]** От тези N равенства следва, че $\sigma\left({T_N}^4 - {T_L}^4\right) = \frac{1}{N+1}\sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)$. Но $S(N) = \sigma\left({T_N}^4 - {T_L}^4\right)$, следователно $\frac{S(0)}{S(N)} = N + 1$. **[2 т.]**

б) При $N = 2$, $2{T_1}^4 = {T_2}^4 + {T_H}^4$ и $2{T_2}^4 = {T_1}^4 + {T_L}^4$. От тези две уравнения с две неизвестни се получава ${T_1}^4 = \frac{1}{3}\left(2{T_H}^4 + {T_L}^4\right)$ **[1 т.]** и получава ${T_2}^4 = \frac{1}{3}\left({T_H}^4 + 2{T_L}^4\right)$. **[1 т.]**

в) Замествайки в горните формули $T_1 \approx 271$ K **[0,5 т.]** и $T_2 \approx 228$ K. **[0,5 т.]**

г) Когато температурата на медното кълбо не се променя, получената топлина от криостата със стайна температура трябва да се изразходва за кипене на течния азот. При малки разстояния между кълбото и криостата ($r_H - r_L \ll r_L$) може да се приеме, че кривината не е съществена и може да се използва същата формула като в случая на плоски тела (равнини). Тогава $\Delta Q_{\text{получено}} = \Delta Q_{\text{кипене}}$, $\sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)4\pi {r_L}^2 \Delta t = \lambda \Delta m = \lambda \rho_{N_2} \Delta V$. Следователно консумацията на течен азот $\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)4\pi {r_L}^2}{\lambda \rho_{N_2}} =$ **[1 т.]** $= \frac{5{,}67.10^{-8}\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}\left(300^4 - 77{,}4^4\right)\text{K}^4 4\pi 0{,}1^2\text{m}^2}{2{,}01.10^5\frac{\text{J}}{\text{kg}}.808\ \text{kg/m}^3} = 3{,}54.10^{-7}\ \text{m}^3/\text{s} = 1{,}27$ l/h. **[1 т.]**

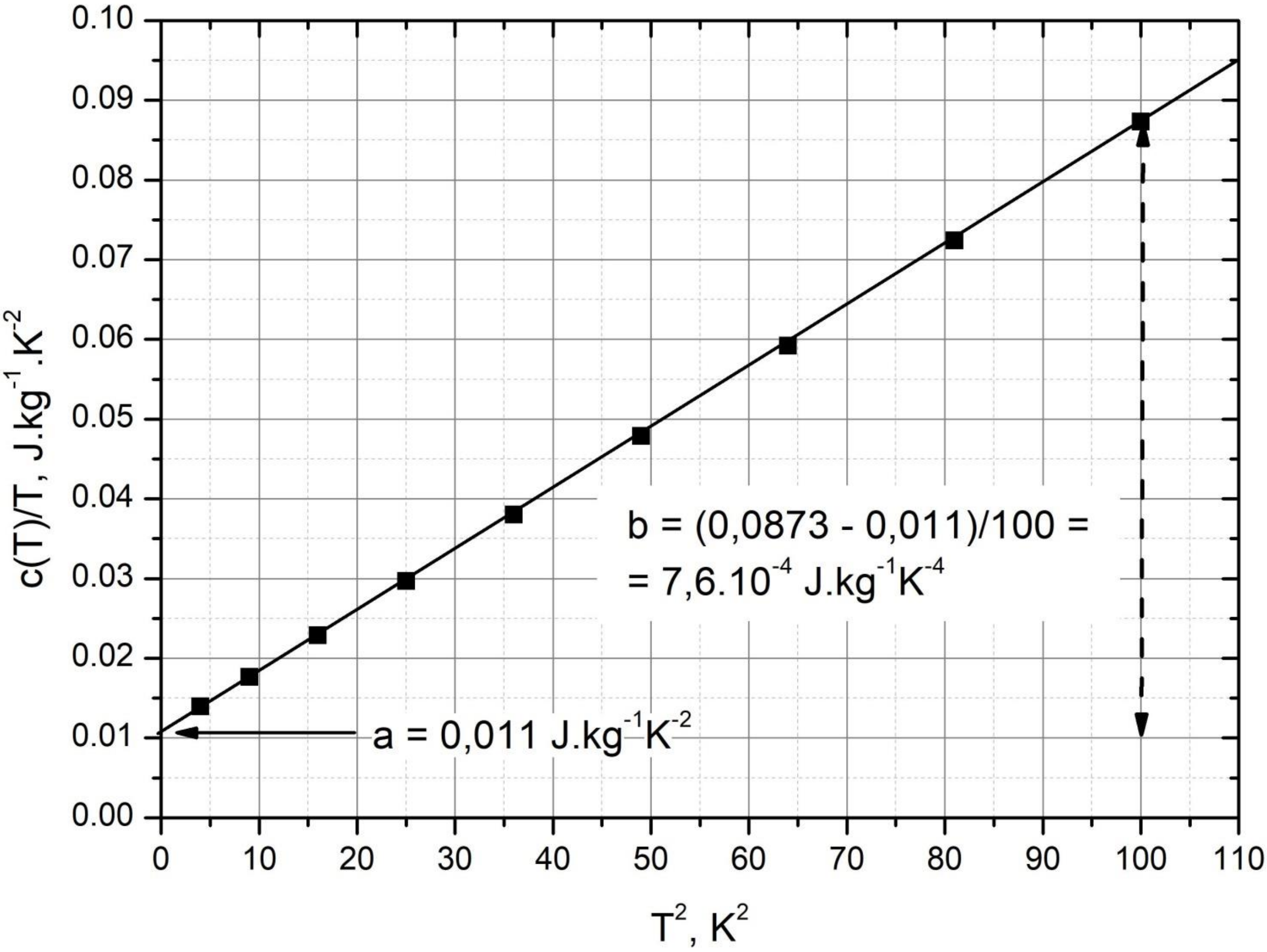
д) Получената топлина от околния криостат ще нагрява медното кълбо,

$\sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)4\pi {r_L}^2 \Delta t = c(77{,}4\ \text{K}).m.\Delta T = c(77{,}4\ \text{K})\rho_{Cu}\frac{4}{3}\pi {r_L}^3 \Delta T$, откъдето

$c(77{,}4\ \text{K}) = \frac{\sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)4\pi {r_L}^2 \Delta t}{\frac{4}{3}\pi {r_L}^3 \rho_{Cu} \Delta T} = \frac{3\sigma\left({T_H}^4 - {T_L}^4\right)\Delta t}{r_L \rho_{Cu} \Delta T} =$ **[1 т.]** $= \frac{3.5{,}67.10^{-8}\text{W.m}^{-2}.\text{K}^{-4}\left(300^4 - 77{,}4^4\right)\text{K}^4 600\text{s}}{0{,}1\text{m}.8960\text{kg.m}^{-3}.4{,}55\text{K}} \approx 202$ J/(kg.K). **[1 т.]**

е) При такава зависимост удобно е тя да се представи като $\frac{c(T)}{T} = a + b.T^2$. **[0,5 т.]** При променливи $x = T^2$ и $y = \frac{c(T)}{T}$ зависимостта ще е линейна, $y = a + b.x$. Наклонът на правата е равен на b , а свободният член е a. Допълваме таблицата с новите променливи: **[0,5 т.]** Чертаем графиката **[1 т.]** и от нея определяме графично коефициентите $a \approx 0{,}011$ J.kg^{-1}.K^{-2} **[1 т.]** и $b \approx 7{,}6.10^{-4}$ J.kg^{-1}.K^{-4} . **[1 т.]**

T, K	$c(T)$, J/kg.K	T^2, K^2	$c(T)/T$, J.kg^{-1}.K^{-2}
2,0	0,0278	4,0	0,0139
3,0	0,0530	9,0	0,0177
4,0	0,0916	16,0	0,0229
5,0	0,148	25,0	0,0297
6,0	0,228	36,0	0,0380
7,0	0,335	49,0	0,0479
8,0	0,474	64,0	0,0592
9,0	0,651	81,0	0,0724
10,0	0,873	100,0	0,0873



Използвана литература (данни): G. K. White and S. J. Collocott, J. Phys. Chem. Ref. Data, **13**, 1251 (1984).