МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА

Русе, 5-7 май 2019 г.

Решения на темата за IV възрастова група (10. –12. клас)

Задача 1

а) Избираме правоъгълна декартова координатна система, чието начало O съвпада с положението на детето и ос y, която сочи вертикално нагоре. Оста x сочи по посока на движението на топката от A към B. Нека детето хвърля топката под ъгъл α. Законът за движение на топката по x и по y е

$$x = v_0 t\cos\alpha, \qquad (1)\ (0.4\ т.)$$

$$y = v_0 t\sin\alpha - \frac{gt^2}{2}. \qquad (2)\ (0.4\ т.)$$

Времето t_B, необходимо за достигане на т. B се намира от условието $y_B = 0$,

$$v_0 t_B \sin\alpha - \frac{g t_B^2}{2} = 0. \qquad (0.4\ т.)$$

Така намираме

$$t_B = \frac{2v_0\sin\alpha}{g} \qquad (3)$$

За да може топката да достигне до т. B, трябва да е изпълнено условието

$$l = x_B = v_0 t_B\cos\alpha = \frac{v_0^2\sin 2\alpha}{g} \qquad (4)$$

или все едно

$$\sin 2\alpha = \frac{gl}{v_0^2}. \qquad (5)$$

Това условие може да се изпълне само ако

$$\frac{gl}{v_0^2} \le 1,$$

т.е. скоростта v_0, трябва да е достатъчно голяма, че $v_0^2 \ge gl.$ (0.8 т.)

б) Разделяме разстоянието l между т. A и т. B на n равни части ($n = 1,2,3, ...$), така че

$$v_0^2 \ge \frac{gl}{n}.$$

Топката може да измине от т. A разстояние l/n. Ако

$$\sin 2\alpha_n = \frac{gl}{n}, \qquad (6)\ (0.8\ т.)$$

от условие (5) следва, че топката ще попадне в т. B след $n-1$ отскачания на n-тото. Очевидно съществуват безкрайно много такива ъгли. (0.2 т.)

в) Очевидно

$$T_n = nt_n = n\frac{2v_0 \sin\alpha_n}{g} = \frac{2nv_0}{g}\sqrt{1-\cos^2\alpha_n} = \frac{2nv_0}{g}\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2\alpha_n} =$$

$$\frac{nv_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1-\sqrt{1-\sin^2 2\alpha_n}} = \frac{nv_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1-\sqrt{1-\frac{g^2l^2}{n^2v_0^4}}} \ (2 \text{ т.}) \qquad (7)$$

г) От горната формула е трудно да се прецени кога времето T_n намалява. Но можем да изразим това време, чрез ъгъла на хвърляне α_n. (0.7 т.)

От уравнение (6) намираме

$$n = \frac{gl}{v_0^2 \sin 2\alpha_n}.$$

Заместваме горното уравнение във второто уравнение на (7) получаваме

$$T_n = n\frac{2v_0 \sin\alpha_n}{g} = \frac{l}{v_0 \cos\alpha_n} \ (0.8 \text{ т.})$$

Когато началният ъгъл α_n намалява, тогава и времето T_n също намалява. Минималното време се достига, когато ъгълът α_n достига 0. От (6) се вижда, че това се случва, когато n расте все повече и повече до безкрайност. (0.5 т.)

Нека n е достатъчно голямо, тогава (7) се приближава до

$$T_n = \frac{nv_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{1-\left(1-\frac{g^2l^2}{n^2v_0^4}\right)^{1/2}} \cong \frac{nv_0\sqrt{2}}{g}\sqrt{\frac{g^2l^2}{2n^2v_0^4}} = \frac{l}{v_0}. \ (1.5 \text{ т.})$$

Физически това отговаря на търкаляне на топката по асфалтовия път. (0.5 т.)

д) От условието следва, че

$$\frac{v_i^2}{v_{i-1}^2} = \kappa. \ (0.5 \text{ т.})$$

Оттук следва, че $v_i^2 = \kappa^i v_0^2$. Тогава пълното разстояние е

$$l = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\sin 2\alpha}{g}v_i^2 = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\kappa^i = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g}\sum_{i=0}^{\infty}\kappa^i \ (2 \text{ т.})$$

Последната сума е безкрайно намаляваща геометрична прогресия.

Получаваме

$$l = \frac{v_0^2 \sin 2\alpha}{g(1-\kappa)}. \ (0.5 \text{ т.})$$

е) По същия начин намиаме пълното време, докато топката спре

$$T = \sum_{i=0}^{\infty} t_i = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{2v_i \sin\alpha}{g} = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g}\sum_{i=0}^{\infty}\kappa^{i/2} = \frac{2\, v_0 \sin\alpha}{g(1-\sqrt{\kappa})} \ (3 \text{ т.})$$

Задача 2

2.1. а) Уравнение на процеса в pV-променливи:

$$\frac{p}{p_0}-1=-\frac{1}{4}\cos\omega t, \qquad \frac{V}{V_0}-1=-\frac{1}{4}\sin\omega t, \text{ [0,5 т.]}$$

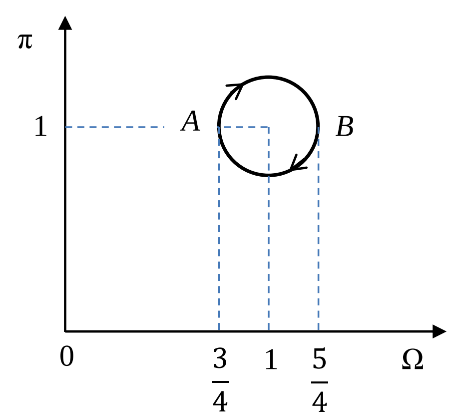
откъдето следва

$$\left(\frac{p}{p_0}-1\right)^2+\left(\frac{V}{V_0}-1\right)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2. \qquad \text{[0,5 т.]}$$

Цикълът в променливи

$$\pi=\frac{p}{p_0}, \qquad \Omega=\frac{V}{V_0},$$

има вид на окръжност $(\pi-1)^2+(\Omega-1)^2=\left(\frac{1}{4}\right)^2$ с център в (1, 1) и радиус $R=\frac{1}{4}$.**[0,5 т.]**



Фиг. 1 [0,5 т.]

б) Уравнението на състояние на идеален газ за един mol е $pV=RT$, което в новите променливи се дава с равенството $\pi\Omega=\tau$. Тук $\tau=\frac{T}{T_0}$, като $p_0V_0=RT_0$. Знаем, че газът не обменя топлина при адиабатен процес. Следователно съществуват две точки върху окръжността, в които кръговия процес се допира до две адиабати. При разширние на газа между тях, той получава топлина от нагревателя. **[1 т.]**

в) По определение КПД на цикъла е

$$\eta=\frac{A'}{Q_{\text{in}}}. \qquad \text{[0,5 т.]}$$

Извършената работа е равна на площта на кръга

$$A'=\pi R^2=\frac{\pi}{16}, \qquad \text{[0,5 т.]}$$

а полученото от работното вещество количество топлина Q_{in} ще оценим приблизително по следния начин. Тъй като изменението на налягането в адиабатния процес е по-бързо от това при изотермния процес, ще приемем че адиабатата около точката на допиране е вертикална. **[1 т.]** Тогава в процеса на разширение от A към B става поглъщане на топлина

$$Q_{\text{in}}=\Delta U+W=\frac{3}{2}\Delta\tau+1.\Delta\Omega+\frac{\pi}{32}=\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{\pi}{32}=\frac{40+\pi}{32}. \text{ [0,5 т.]}$$

Следователно получаваме

$$\eta = \frac{A'}{Q_{\text{in}}} = \frac{2\pi}{40+\pi} \approx 0{,}15 .$$ **[0,5 т.]**

2.2. Махалото извършва хармонични трептения при отклонение от вертикалата на ъгъл $\varphi << 1$. В това положение на топчето с маса m действа силата на тежестта mg, като връщащата сила, действаща непосредствено на топчето, е насочена по допирателната към траекторията на движение (част от окръжност с радиус L) и големината ѝ се дава с израза

$$F_1 = mg\sin\varphi \approx mg\varphi = mg\frac{x}{L} .$$ **[0,5 т.]**

Върху пръчката в точката на закрепване на пружината действа връщаща еластична сила

$$F_2 = kx_1 ,$$ **[0,5 т.]**

където $x_1 \approx \varphi l$. Тогава имаме

$$\frac{x_1}{x} \approx \frac{l}{L} .$$ **[0,5 т.]**

Тъй като силите F_1 и F_2 са приложени в различни точки, нито една от тях не е резултантна връщаща сила. За да я определим ще използваме пълния момент на силите M, който връща системата в равновесно положение:

$$M = F_1L + F_2l = \frac{mgx}{L}L + \left(k\frac{l}{L}x\right)l = \left(mg + \frac{kl^2}{L}\right)x .$$ **[1 т.]**

Тогава резултантната връщаща сила F, действаща на топчето, ще намерим като

$$F = \frac{M}{L} = \left(\frac{mg}{L} + \frac{kl^2}{L^2}\right)x .$$ **[0,5 т.]**

Изразът в скобите пред x играе ролята на коефициент на еластичност k', при което за честотата на хармоничните трептения намираме

$$\omega = \sqrt{\frac{k'}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{k}{m}\frac{l^2}{L^2}} .$$ **[1 т.]**

Решение 2.3. а) Енергията на математичното махало, когато извършва хармонични трептения е

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{m\omega^2x^2}{2} ,$$ **[0,5 т.]**

където p е импулса, а $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ е кръговата честота. Минималната енергия на осцилатора ще оценим чрез съотношението на Хайзенбрг $\Delta x \Delta p \sim \hbar$. Ако a е амплитудата на класическите трептения, $\Delta x \approx 2a$ **[0,25 т.]**, а импулса $p \approx \Delta p \approx \frac{\hbar}{2a}$ **[0,25 т.]**. Тогава имаме

$$E \approx \frac{\hbar^2}{8ma^2} + \frac{m\omega^2 a^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\hbar}{2\sqrt{m}a}\right)^2 - 2\left(\frac{\hbar}{2\sqrt{m}a}\right)\sqrt{m}\omega a + (\sqrt{m}\omega a)^2\right] + \frac{\hbar\omega}{2} \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{\hbar}{2\sqrt{m}a} - \sqrt{m}\omega a\right)^2 + \frac{\hbar\omega}{2}$$

В състояние с минимална енергия изразът в скобите е нула и математичното махало извършва нулеви трептения с енергия

$$E_{\min} = \frac{\hbar\omega}{2}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

б) При тези трептения ъгловото отклонение от вертикалата е

$$x_{\max} = l\Delta\varphi \to \Delta\varphi = \frac{x_{\max}}{l} \qquad \textbf{[0,25 т.]}.$$

Тъй като

$$\frac{m\omega^2 x_{\max}^2}{2} = \frac{\hbar\omega}{2}, \qquad \textbf{[0,25 т.]}$$

намираме

$$\Delta\varphi = \sqrt{\frac{\hbar}{ml^2\omega}} = \left(\frac{\hbar^2}{m^2 l^3 g}\right)^{1/4}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

От друга страна моментът на импулса L се изменя от нула до ΔL. Като отчетем, че кинетичната енергия е максимална в равновесното положение, имаме

$$\frac{(\Delta L)^2}{2ml^2} = \frac{\hbar\omega}{2}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

или

$$\Delta L = \sqrt{\hbar m l^2 \omega} = (\hbar^2 m^2 l^3 g)^{1/4}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

в) Вижда се, че

$$\Delta\varphi\, \Delta L = \hbar \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

е ново съотношение за неопределеност *ъгъл – момент на импулса*.**[0,5 т.]**

Задача 3. Движение на проводяща рамка в магнитно поле.

а) Магнитният поток $\Phi(z)$, който пробожда рамката, когато тя се намира на разстояние $z \gg l$ от проводника, е $\Phi(z) = B.S = \frac{\mu_0 I l^2}{2\pi z}$. **[1 т.]**

б) Производната на магнитния поток е $\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi z^2}\frac{dz}{dt} = -\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi z^2}v(z)$. **[1 т.]** Индуцираното електродвижещо напрежение в рамката е $\mathrm{E}_i = -\frac{d\Phi}{dt} = \frac{\mu_0 I l^2}{2\pi z^2}v(z)$. **[0,5 т.]** Индуцираният ток е $I_R = \frac{\mathrm{E}_i}{R} = \frac{\mu_0 I l^2}{2\pi z^2 R}v(z)$. **[0,5 т.]**

в) Тъй като скоростта $v(z)$ е отрицателна, токът I_R също е отрицателен и тече в посока на часовниковата стрелка. Съответно той ще породи сили на Ампер, които на всяка страна на квадратната рамка действат навътре (към центъра на квадрата). **[1 т.]** Тъй като две от силите (действащи на страните, успоредни на z) се уравновесяват, сумата на останалите две е насочена по z. Големината на силата, действаща на по-близката до проводника страна на рамката, е $F_l(z) = B(z)|I_R|l$. **[0,5 т.]** Големината на силата, действаща на по-далечната от проводника страна на рамката, е $F_l(z+l) = B(z+l)|I_R|l$. **[0,5 т.]** Резултантната сила е $F(z, v(z)) = F_l(z) - F_l(z+l) = -\frac{dB}{dz}l|I_R|l =$ **[1 т.]** $-\frac{\mu_0 I}{2\pi z^2}l\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi z^2 R}v(z)l = -\left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{v(z)}{Rz^4}$. **[1 т.]**

г) Тъй като $F(z, v(z)) = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = m\frac{dv}{dz}v$, то замествайки силата с получения по-горе резултат, се получава $-\left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{v(z)}{Rz^4} = m\frac{dv}{dz}v(z)$. **[1 т.]** Съкращавайки на $v(z)$ и съобразявайки, че $\frac{1}{z^4} = -\frac{1}{3}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{z^3}\right)$, горното уравнение може да се преобразува до $\frac{d}{dz}\left[\left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{1}{3Rz^3}\right] = \frac{d(mv)}{dz}$. Следователно $\left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{1}{3Rz^3} = mv + const.$ Неизвестната константа можем да получим от началните условия ($z \to \infty, v = v_\infty$). Тогава $0 = mv_\infty + const.$ и $const. = -mv_\infty$. **[1 т.]** Така получаваме $\left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{1}{3Rz^3} = mv - mv_\infty$, или $v - v_\infty = \left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{1}{3Rmz^3}$. Като означим $\left(\frac{\mu_0 I l^2}{2\pi}\right)^2\frac{1}{3Rm} \equiv A$, то за скоростта $v(z)$ получаваме $v(z) = \frac{A}{z^3} + v_\infty$ **[1 т.]**

д) Тъй като с доближаването на рамката до проводника скоростта v постоянно намалява по големина, при някакво разстояние z_{min} тя ще стане нула и рамката ще спре. Тогава $z_{min} = \sqrt[3]{-\frac{\mathrm{A}}{v_\infty}}$. **[2 т.]**

е) Тъй като ускорението е $a = \frac{dv}{dt}$, то $a = \frac{dv}{dz}\frac{dz}{dt} = \frac{dv}{dz}v$. Тъй като $\frac{dv}{dz} = -\frac{3A}{z^4}$, то $a = -\frac{3A}{z^4}\left(v_\infty + \frac{A}{z^3}\right) = -\frac{3Av_\infty}{z^4} - \frac{3A^2}{z^7}$. **[1 т.]** То ще има максимум, когато $\frac{da}{dz} = 0$, $\frac{12Av_\infty}{z^5} + \frac{21A^2}{z^8} = 0$. **[1 т.]** Така $z_a = \sqrt[3]{-\frac{7}{4}\frac{\mathrm{A}}{v_\infty}} = \sqrt[3]{\frac{7}{4}}z_{min}$. Следователно $k = \sqrt[3]{\frac{7}{4}} \approx 1{,}205$. **[1 т.]**

Задача 4. Слънчева физика

а) Нека S е площта на платното. Тогава масата на платното е:

$$m = \rho S d,$$

а гравитационната сила, която му действа:

$$F_G = \frac{G M_\odot \rho S d}{r_0^2}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

За време t върху платното падат фотони с обща енергия $E = I_0 S t$. Енергията на един отделен фотон е $\epsilon = h\nu$, а импулсът му: $p = h/\lambda = h\nu/c = \epsilon/c$. Следователно общият импулс на фотоните, попаднали върху платното е:

$$P = \frac{E}{c} = \frac{I_0 S t}{c}. \qquad \textbf{(2.0 т)}$$

След като всички фотони се отразят от платното, импулсът им запазва големината си, но променя посоката си на противоположна. Следователно общият импулс, който светлината придава на платното е:

$$\Delta P = P - (-P) = 2P. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

Съответно силата на светлинното налягане върху платното е:

$$F_L = \frac{\Delta P}{t} = \frac{2 I_0 S}{c}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

От условието $F_G = F_L$за уравновесяване на силите получаваме:

$$d = \frac{2 I_0 r_0^2}{G M_\odot \rho c} \approx 5{,}7.10^{-7}\ \text{m (570 nm)}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

б) Мощността на излъчване (т.е. светимостта) на Слънцето е:

$$P = \sigma T^4 . 4\pi R_\odot^2. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

Ако приемем, че излъчената енергия не се поглъща в междупланетното пространство, следва, че интензитетът на слънчевото лъчение, достигащо земната орбита, е:

$$I_0 = \frac{P}{4\pi r_0^2} = \frac{\sigma T^4 R_\odot^2}{r_0^2}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

Оттук намираме:

$$T = \sqrt{r_0/R_\odot}\,\sqrt[4]{I_0/\sigma} \approx 5800\ \text{K}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

в) От закона на Вин намираме, че Слънцето излъчва най-интензивно лъчение с дължина на вълната:

$$\lambda_0 = \frac{b}{T} = 500\ \text{nm}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

г) Интензитетът на слънчевата светлина на произволно разстояние r от Слънцето се дава с израза:

$$I = \frac{P}{4\pi r^2} = \frac{I_0 r_0^2}{r^2}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

Ако приемем, че слънчевата светлина се състои основно от фотони с дължина на вълната λ_0, т.е. с еднаква енергия:

$$\epsilon = h\nu = \frac{hc}{\lambda_0}, \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

следва, че фотонният поток на разстояние r от Слънцето е:

$$\Phi = \frac{I}{\epsilon} = \frac{I_0 r_0^2 \lambda_0}{hcr^2}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

На търсеното разстояние $r_{\max}$ фотонният поток е равен на $\Phi_{\min}$, т.е.

$$r_{\max} = r_0 \sqrt{\frac{I_0 \lambda_0}{\Phi_{\min} hc}} \approx 8{,}8.10^{17}\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$

Разстоянието, което светлината изминава за време t = 1 година е:

$$s = ct = 3.10^8\ \mathrm{m/s}\ .365\ \text{дни}\ .\ 24\ \text{часа}\ .\ 3600\ \mathrm{s} = 9{,}46.10^{15}\ \mathrm{m}.$$

Следователно максималното разстояние, от което може да бъде видяно Слънцето, изразено в светлинни години, е:

$$r_{\max} = 8{,}8.10^{17}\mathrm{m}/(9{,}46.10^{15}\ \mathrm{m/св.год.}) \approx 93\ \text{светлинни години}. \qquad \textbf{(1.0 т)}$$