

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XXII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Областен кръг на олимпиадата по астрономия

23 февруари 2019 г.

Възрастова група IX-X клас – решения

1 задача. Планета около двойна звезда. Двойната система Kepler-47 се състои от две звезди, които се движат около общия си център на масите с период 7.45 денонощия. Разстоянието между тях е 0.0836 AU (астрономически единици). Компонентата А е жълта звезда с маса $1.043 M_{\odot}$ и радиус $0.964 R_{\odot}$, а компонентата В е червено джудже с маса $0.362 M_{\odot}$ и радиус $0.351 R_{\odot}$. С M_{\odot} и R_{\odot} са означени масата и радиусът на Слънцето.

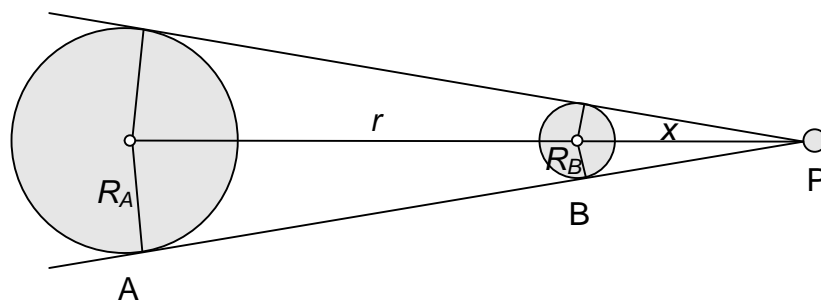
• А) На какво максимално разстояние от компонентата В трябва да се намира в даден момент една планета, така че от нейната повърхност да се наблюдава пълно затъмнение на компонентата А от компонентата В?

• Б) Планетата Kepler-47b е най-вътрешната от трите открити досега планети, които обикалят около двойната звезда. Тя се движи по орбита с радиус 0.2962 AU. Намерете орбиталния период на планетата около двойната звезда в земни години и в дни. Вие се намирате на повърхността на тази планета. Определете през какъв интервал от време ще виждате затъмнение на звездата А от звездата В. Как ще се променят условията на повърхността на планетата около вас по време на такова затъмнение?

• В) По друго време на деня в небето над вас греят и двете слънца. Как мислите, дали ще виждате ясно двете сенки, които ще хвърляте?

Решение:

Означаваме с r разстоянието между двете звезди А и В, а с x максималното разстояние от звездата В, на което от планетата Р ще се вижда пълно затъмнение на звездата А от звездата В. Това е разстоянието, на което за наблюдател от планетата Р двете звезди ще имат еднакви ъгли размери, както е показано на схемата.



В сила е следното съотношение:

$$\frac{R_A}{R_B} = \frac{r+x}{x}$$

където R_A и R_B са радиусите на звездите А и В. Оттук намираме:

$$x = r \frac{R_B}{R_A - R_B} \approx 0.0479 \text{ AU}$$

На такова малко разстояние планетата едва ли би могла да има устойчива орбита около двете звезди.

Да означим с M_A и M_B масите на звездите А и В, а с r_p радиуса на орбитата на планетата около двойната система. Орбиталния период T_p на планетата ще намерим чрез III закон на Кеплер:

$$\frac{r_p^3}{T_p^2} = \frac{\gamma(M_A + M_B)}{4\pi^2}$$

Когато радиусът на орбитата е изразен в астрономически единици, масите на звездите – в слънчеви маси, а периодът – в години, горната формула може да се запише в следния вид:

$$\frac{r_p^3}{T_p^2} = M_A + M_B$$

Оттук получаваме:

$$T_p = \sqrt{\frac{r_p^3}{M_A + M_B}} \approx 0.136 \text{ год.} \approx 49.7 \text{ денонощия}$$

Нека T_{AB} е орбиталният период на движение на звездите от двойната система около общия им център на масите, а T_x да е периодът, през който от планетата се наблюдават затъмнения на звездата А от звездата В. Можем да намерим T_x от следното съотношение:

$$\frac{1}{T_x} = \frac{1}{T_{AB}} - \frac{1}{T_p}$$

$$T_x = \frac{T_p T_{AB}}{T_p - T_{AB}} \approx 8.8 \text{ денонощия}$$

Както се вижда от данните, звездата А е доста подобна на Слънцето, а звездата В е червено джудже. Това означава, че звездата В има светимост стотици пъти по-ниска от светимостта на звездата А. Планетата е отдалечена от компонентата В на разстояние, значително по-голямо от максималното, на което може да има пълни затъмнения. Звездата В ще покрива частично видимия диск на звездата А. Но все пак по време на такова затъмнение на повърхността на планетата ще става по-тъмно, навярно с идването на „сянката“ на червеното джудже на мястото на наблюдение ще се усеща леко захлаждане.

Когато и двете звезди се виждат в небето над нас, ние наистина ще хвърляме по две сенки. Но ще виждаме добре само сянката си, хвърлена при осветяването ни от звездата А. Поради твърде слабия блясък на звездата В, сянката, която ще хвърляме при осветяването ни от нея, ще бъде трудно различима.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилен начин за намиране на максималното разстояние, от което могат да се виждат пълни затъмнения – 2.5 т.

За верен числен отговор – 0.5 т.

За правилен начин за определяне на орбиталния период на планетата – 2.5 т.

За верен числен отговор – 0.5 т.

За определяне на периода, през който ще се виждат затъмнения – 3 т.

За коментар относно промяната на условията по време на затъмнение – 1 т.

За обяснение относно видимостта на две сенки – 2 т.

2 задача. Изгреви. Двете най-важни за нас небесни светила са Слънцето и Луната.

• А) Кое явление се наблюдава по-често от територията на България – изгрев на Слънцето или изгрев на Луната?

• Б) Има ли места по Земята, където по-често се наблюдава изгрев на другото светило – не това, която изгрява по-често за наблюдател в България? Ако има, къде по Земята са тези места?

• В) Има ли места по Земята, където в някои интервали от годината по-често изгрява Слънцето, а в други – Луната? Ако има, къде по Земята са тези места?

Обяснете вашите отговори.

Решение:

На територията на България, както и в преобладаващата част от света, изгревите и залезите на светилата се случват поради видимото денонощно въртене на небесната сфера от изток на запад, дължащо се на околоосното въртене на Земята. (*Всъщност, според древните представи небесните сфери са множество и са кристални. Има сфера на звездите, сфера на Слънцето, сфера на Луната и по една сфера за всяка от планетите.*). Изгревите на звездите стават през период от $23^{\text{h}}56^{\text{m}}$ или едно звездно денонощие. Поради орбиталното движение на Земята около Слънцето, се наблюдава видимо годишно преместване на Слънцето от запад на изток по еклиптиката. Ето защо Слънцето изостава от звездите при видимото денонощно въртене на небесната сфера и изгревите на Слънцето стават средно през период от 24 часа. А Луната се движи по своята орбита около Земята от запад на изток с период 27.3 денонощия и изостава много по-бързо от Слънцето. По тази причина средният период между два изгрева на Луната е с около 50 минути по-дълъг от слънчевото денонощие. В резултат на това има денонощия, в които Луната не изгрява. Следователно по-често се случват изгревите на Слънцето, отколкото изгревите на Луната.

На северния и южния полюс на Земята звездите не изгряват и не залязват, а видимото им денонощно движение става успоредно на хоризонта. Слънцето изгрява и залязва поради промяната на неговата деклинация при видимото му годишно движение по еклиптиката. В годината има един изгрев на Слънцето и един залез. При орбиталното движение на Луната около Земята деклинацията на Луната също се променя, тъй като лунната орбита е наклонена спрямо небесния екватор. По тази причина Луната изгрява по веднъж във всеки сидеричен месец от 27.3 денонощия. Следователно на северния и на южния полюс на Земята лунните изгреви са по-чести от слънчевите.

По-особена е ситуацията в областите около полюсите на Земята, оградени от полярните окръжности. Да разгледаме за определеност областта около северния полюс с граница северната полярна окръжност. В определени интервали от време там Слънцето изгрява всеки ден поради видимото си денонощно движение от изток на запад. Същото се отнася и до Луната, но както вече беше обяснено, нейните изгреви се случват по-рядко. За всяко място от тази област обаче, има определен период около зимното слънцестояние, в който Слънцето не изгрява в продължение на дни, седмици или месеци. Продължителността на този интервал е толкова по-голяма, колкото мястото е по-близо до полюса. Около лятното слънцестояние пък има интервал от време, в който Слънцето дни наред не залязва, а следователно тогава също не се случват слънчеви изгреви, защото Слънцето е постоянно над хоризонта. През тези периоди обаче, Луната продължава да изгрява и залязва поради видимото си денонощно движение. Следователно тогава лунните изгреви са по-чести от слънчевите. Тук следва да внесем и едно допълнително уточнение. В рамките на всеки лунен месец за такова географско място ще има и период, когато Луната няма да изгрява в продължение на дни. Това ще бъде периодът, когато Луната се намира около точката на зимно слънцестояние. Също така ще има период от дни наред, през който Луната ще бъде постоянно над хоризонта. Това ще става, когато Луната е близо до точката на лятно слънцестояние. Така че, по Земята има места, в които понякога са

по-чести слънчевите изгреви, а понякога – лунните. Това са областите около полюсите, ограничени от полярните окръжности. Това е валидно обаче, само ако не отчитаме рефракцията.

Поради рефракцията границата на областта около северния полюс, където има дни без изгрев на Слънцето, се стеснява към север. Но затова пък границата на областта, където има дни без залез на Слънцето, се разширява към юг. Аналогично условие важи и за областта около южния полюс.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилни разсъждения и отговор кои изгреви са по-чести за територията на България – 3.5 т.

За посочване на полюсите, като местата, където Луната изгрява по-често от Слънцето, и обяснение – 3.5 т.

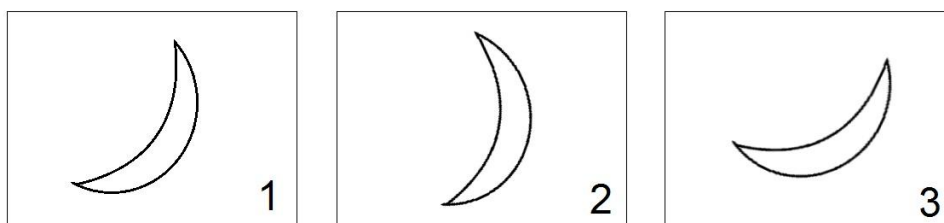
За правилно посочване на областите, където в различни периоди изгрява по-често Слънцето, а в други – Луната, и обяснение – 3 т.

За описание на периодите в лунния месец, когато в тези области Луната в продължение на дни не изгрява или не залязва – 1 т.

За разсъждения относно рефракцията – 1 т.

3 задача. Луна – Земя. Набират се опитни космически пилоти за мисия до Луната и вие сте кандидат. Избраните трябва да отговарят на високи критерии по отношение на техните знания и умения. Предлагаме ви два въпроса от конкурсния тест.

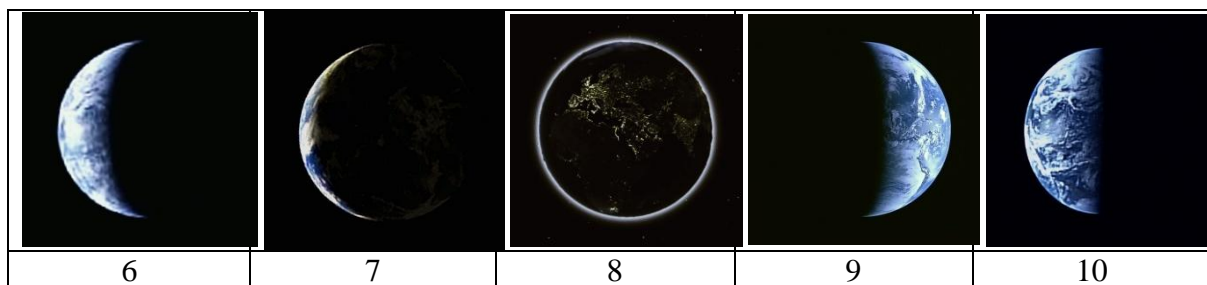
• А) Наблюдавате залязващата млада Луна от умерените северни географски ширини. Тя може да се вижда по следните три начина:



Кога и защо Луната може да се вижда така в посока запад в различни моменти от годината?

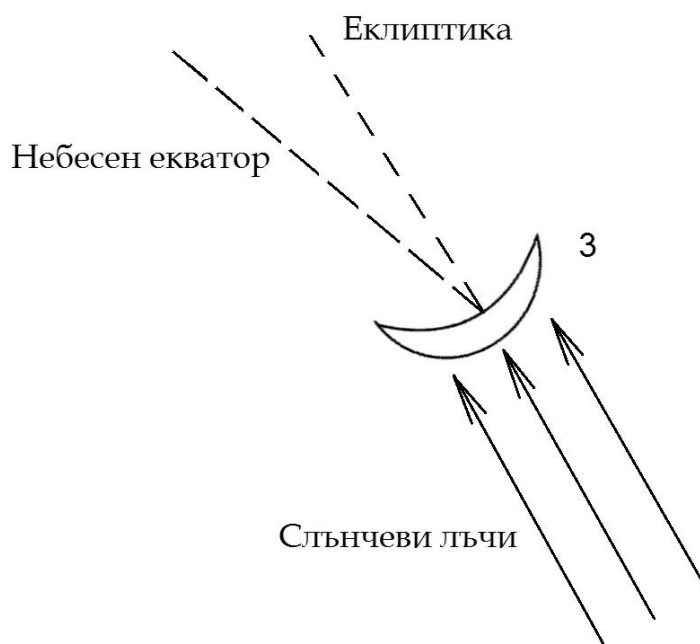
• Б) Експедиция ще е в района около центъра на видимия диск на Луната и трябва да протече в рамките на един лунен ден. Разполагате с 10 изображения на Земята в различни фази. Изберете от тях двете, които съответстват на това как ще изглежда за вас Земята в началото и в края на лунната експедиция. Обяснете защо очаквате Земята да изглежда така, имайки предвид условията за кацане, пребиваване и излитане от Луната.





Решение:

А) Наклонът на видимия сърп на Луната зависи от това в каква посока относно него се намира Слънцето. Видимото положение както на Слънцето, така и на Луната е свързано с еклиптиката. Разбира се, много е важно положението на небесния екватор, но в задачата се споменава, че разглеждаме случая на умерени географски ширини, т.е. наклонът на небесния екватор относно хоризонта е около 40° - 50° . Наклонът на еклиптиката относно небесния екватор е $23^{\circ}.5$ и следователно наклонът ѝ относно хоризонта може да се мени от $16^{\circ}.5$ до $73^{\circ}.5$. Няма да разглеждаме наклона на лунната орбита относно еклиптиката, защото той е сравнително малък, само 5° , и защото линията на възлите на лунната орбита непрекъснато се върти – прави пълна обиколка за около 18.6 години. Наклонът на еклиптиката относно хоризонта ще е максимален, когато в близост до западния хоризонт се намира пролетната равноденствена точка. В този случай ние ще виждаме Луната така както е показано на рисунка 3.



Понеже Луната е млада и следователно се намира на небето недалеч от Слънцето, то Слънцето трябва да е в тази област на еклиптиката, която е непосредствено преди пролетната равноденствена точка. Следователно може да наблюдаваме Луната така както е показана на рисунка 3 един-два месеца преди началото на пролетта, т.е. във втората половина на зимата, през месец февруари и първата половина на март.

Разсъждавайки по подобен начин, може да заключим, че така както е изобразена на рисунка 2, Луната може да се наблюдава в района на есенната равноденствена точка, а това може да се случи през втората половина на лятото, през месец август и през първата половина на септември, когато Слънцето е в област на еклиптиката която е непосредствено преди есенната равноденствена точка.

За да виждаме Луната както е на рисунка 1, трябва слъчевите лъчи да падат върху Луната приблизително успоредно на небесния екватор. Еклиптиката е успоредна на небесния екватор в областта на точките на лятно и зимно слънцестоене. Следователно младата Луна трябва да се намира в района на тези точки, а Слънцето да е в област на еклиптиката, която предхожда тези точки. Това може да се случи през втората половина на пролетта или през втората половина на есента, т.е. през месец май и първата половина на юни или през месец ноември и първата половина на декември.

Б) Лунният ден продължава около 14.76 земни денонощия. Кацането трябва да стане в началото на лунния ден, когато Слънцето вече се е издигнало над хоризонта така, че сенките от кратерите, релефните форми и камъните по лунната повърхност да позволяват да се избере достатъчно подходящо място за кацане. Следователно най-добре е това да се случи около 1-2 земни денонощия след началото на лунния ден. Понеже експедицията е в района на центъра на лунния диск, началото на лунния ден е моментът на първа четвърт на Луната. След около две денонощия ще е огряна повече от половината от лунния диск, но погледнато от Луната, Земята ще е отминала фазата последна четвърт и сърпът ще е малко по-тънък. От всички показани снимки най-близка до тази фаза е Земята на снимка 6.

Излитането от Луната трябва да стане преди края на лунния ден, защото поддържането на подходяща за живот температура би било много трудно след залеза на Слънцето, поради голямото количество енергия, което е необходимо за тази цел. Следователно трябва да излетим преди Луната да достигне до фаза последна четвърт, а Земята, гледана от Луната, до фаза първа четвърт. Най-добре на този момент от време отговаря снимка 9.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За посочване на периодите от време, когато Луната може да се вижда над хоризонта, както е показано на сяка от трите рисунки и обяснение – 3 × 2 т. = 6 т.

За обосновка и правилен избор на фазите на Земята, видими от Луната, за началото и за края на експедицията – 2 × 3 т. = 6 т.

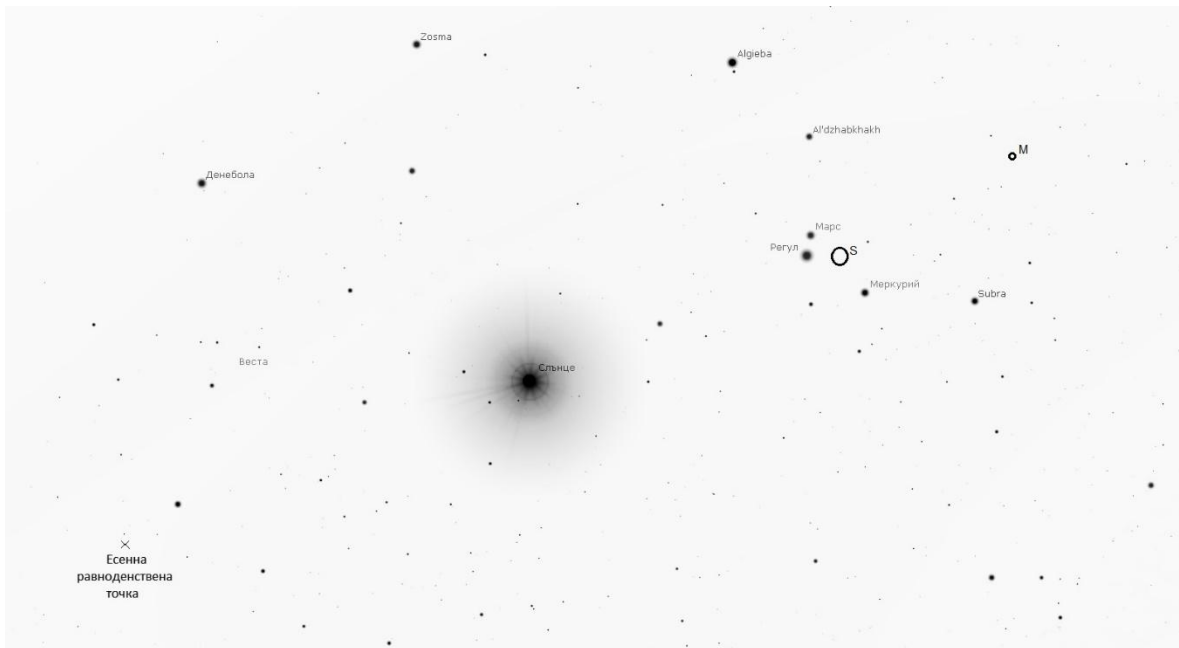
4 задача. Слънчево затъмнение. Разгледайте дадената ви снимка на пълно слънчево затъмнение. Разполагате и с карта, която показва положенията на небесните светила 14 денонощия след затъмнението.

- А) Като сравнявате със снимката, нанесете на картата положенията на Слънцето и на Марс в момента на слънчевото затъмнение. Обяснете промяната в положението на Марс (само качествено, без пресмятания).

- Б) Направете необходимите измервания върху картата и определете датата, на която е станало слънчевото затъмнение.

Решение:

Нанасяме върху картата положенията на Слънцето и Марс в момента на затъмнението. Отбелязваме ги съответно с точките S и M.



В разглеждания интервал от време Марс се придвижва от запад на изток (право движение), но изостава от Слънцето, т.е. видимото му положение се отдалечава от това на Слънцето. Това означава, че наскоро Марс е бил в съединение със Слънцето.

Известно ни е, че новото положение на Слънцето, отразено на картата, съответства на момент от време, който е 14 дни след затъмнението. Измерваме разстоянието между двете позиции на Слънцето. То се оказва равно на 62 mm. Измерваме и разстоянието от новото положение на Слънцето до есенната равноденствена точка, което е 82 mm. Оттук определяме колко дни след момента, отразен на картата, Слънцето ще бъде в есенната равноденствена точка:

$$14 \text{ денонощия} \times \frac{82 \text{ mm}}{62 \text{ mm}} \approx 18.5 \text{ денонощия}$$

Следователно есенното равноденствие ще бъде $14 + 18.5 = 32.5$ денонощия след слънчевото затъмнение. Есенното равноденствие се случва на 22 или 23 септември. Да приемем, че в дадената година есенното равноденствие е било на 22 септември:

$$32.5 - 22 = 10.5 \text{ денонощия}$$

Месец август има 31 дни.

$$31 - 10.5 = 20.5 \text{ денонощия}$$

В момента на слънчевото затъмнение от месец август са изминали 20.5 денонощия, което означава, че датата на затъмнението е била 21 август. Ако есенното равноденствие е било на 23 септември, то датата на затъмнението е била 22 август.

В действителност затъмнението е станало на 21 август 2017 г. Есенното равноденствие в тази година е било на 22 септември.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилно нанасяне на положенията на Слънцето и Марс на картата – 3 т.

За разсъждения относно преместването на позицията на Марс – 1 т.

За правилен метод за определяне на датата на затъмнението – 3 т.

За измервания върху картата – 2 т.

За числени пресмятания и краен резултат – 3 т.

5 задача. Пешеходна скорост. Да си представим, че Слънцето е самотна звезда, която се носи в космическото порстранство извън нашата Галактика и далеч от всякакви други галактики.

- А) Вие сте в космически кораб, който се движи около Слънцето по кръгова орбита с радиус 1 светлинна година. Като знаете, че светлината от Слънцето достига до Земята за 500 секунди, пресметнете за колко време корабът ще прави една обиколка около Слънцето.

- Б) С кратък импулс на ракетните двигатели вашият космически кораб придобива минималната скорост, с която може да се откъсне от гравитационното въздействие на Слънцето и никога повече да не се върне към него – скорост на избягване, аналогича на втора космическа скорост. Пресметнете каква трябва да е тази скорост.

Скоростта на светлината е 300 000 km/s.

- В) Определете разстоянието от Слънцето, на което скоростта на избягване ще се равнява на скоростта на пешеходец – 5 km/h. Споделете вашето впечатление от резултата, който получавате.

Решение:

Да означим с T_0 и T орбиталните периоди на Земята и на космическия кораб около Слънцето, а с r_0 и r радиусите на орбитите на Земята и на кораба. Използваме III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{r_0^3}{T_0^2}$$

Оттук получаваме:

$$T = T_0 \sqrt{\frac{r^3}{r_0^3}}$$

Ще изразим периодите в години, а орбиталните радиуси в светлинни секунди:

$$T = 1 \text{ година} \times \sqrt{\frac{(1 \text{ св. година} \times 365.25 \text{ св. дни} \times 24^h \times 60^m \times 60^s)^3}{(500^s)^3}}$$

$$T \approx 15.86 \times 10^6 \text{ години}$$

Скоростта на избягване, или параболичната скорост на разстояние r от тяло с маса M се изчислява по формулата:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r}} = v_0 \sqrt{2}$$

където γ е гравитационната константа, а $v_0 = \sqrt{\gamma M/r}$ е кръговата скорост или скоростта на движение по кръгова орбита с радиус r около тялото с маса M .

Като знаем периода на обикаляне на космическия кораб по кръгова орбита с радиус една светлинна година, можем да определим неговата кръгова скорост. За по-лесно пресмятане ще я сравним със скоростта на светлината $c = 300\,000$ km/s. Дължината на окръжността с радиус 1 светлинна година е равна на 2π светлинни години. Светлината изминава такова разстояние за 2π години време, а космическият кораб – за 15.86×10^6 години. Следователно:

$$\frac{v_0}{c} = \frac{2\pi \times 1 \text{ година}}{15.86 \times 10^6 \text{ години}}$$

$$v_0 \approx 118.9 \text{ m/s}$$

Сега вече лесно ще намерим параболичната скорост:

$$v_p = v_0\sqrt{2} \approx 168 \text{ m/s}$$

Скоростта на пешеходеца означаваме с $v_1 = 5 \text{ km/h} \approx 1.39 \text{ m/s}$, а разстоянието от Слънцето, на което тя се равнява на параболичната скорост, с r_x . От формулата за параболичната скорост получаваме:

$$r = \frac{2\gamma M}{v_p^2}$$

$$r_x = \frac{2\gamma M}{v_1^2}$$

Разделяме двете уравнения почленно и намираме:

$$r_x = r \cdot \frac{v_p^2}{v_1^2}$$

$$r_x \approx 14600 \text{ светлинни години}$$

Този резултат на пръв поглед изглежда толкова невероятен, че е естествено решаващият задачата отначало да не повярва в своите изчисления и у него да възникне желание да ги провери поне няколко пъти. Оказва се, че дори на разстояние, сравнимо с галактичните мащаби, нашата пешеходна скорост няма да е достатъчна, за да се откъснем от гравитацията на Слънцето. Това е още една демонстрация колко са огромни космическите измерения в сравнение с нашите привични човешки мерки.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилен начин за определяне на периода на движение на кораба около Слънцето на 1 светлинна година – 3 т.

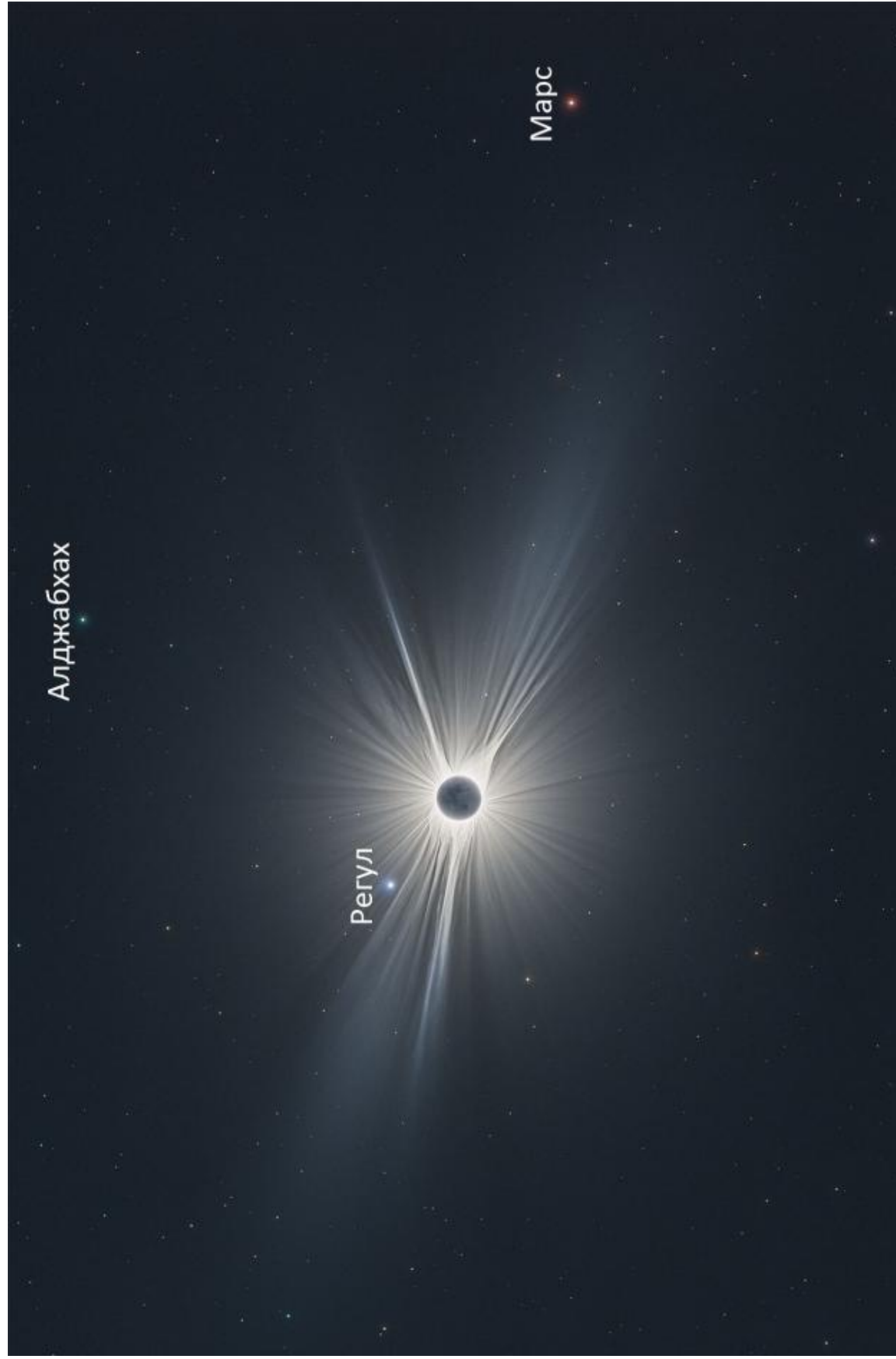
За верен числен резултат – 1 т.

За правилен начин за определяне на параболичната скорост на това разстояние от Слънцето – 3 т.

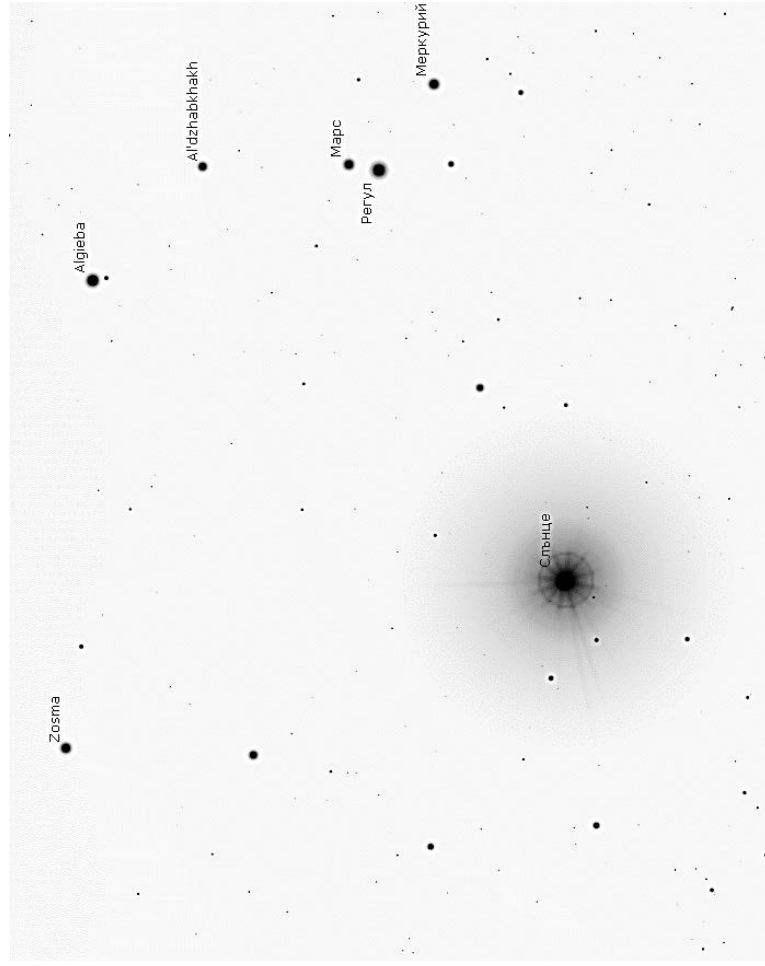
За верен числен отговор – 1 т.

За правилен начин за определяне на разстоянието, на което пешеходната скорост е равна на параболичната – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.



Пълно слънчево затъмнение – към 4 задача. Изображението следва да се размножава чрез принтиране, а не чрез копиране.



Карта, показваща положението на небесните светила 14 декември