МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

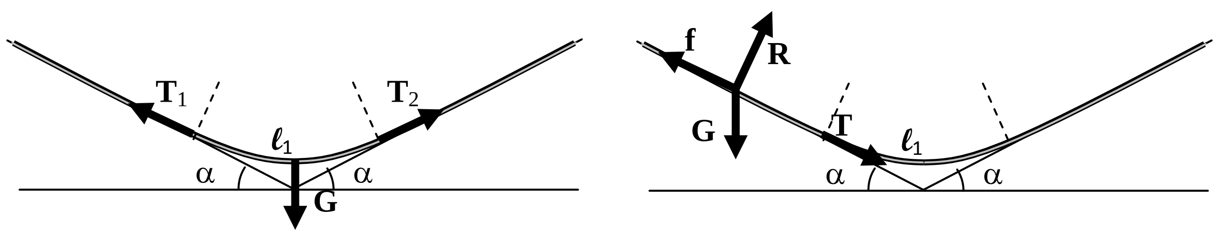
Национално есенно състезание по физика
Плевен, 7–9 ноември 2014 г.
Решения на специалната тема

Задача 1. Механика на тежък шнур

А) Масата на висящия участък е:

(1) $$m_1 = \frac{ml_1}{l} = mk\,,$$

където $k = l_1/l$.



Силите на опън $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ в двата края на участъка са допирателни към шнура и имат еднакви големини: $T_1 = T_2 = T$. От условието за равновесие на висящия участък имаме:

(2) $$m_1 g = 2T\sin\alpha$$

или

(3) $$T = \frac{mg}{2\sin\alpha}k\,.$$

От условието за равновесие на един от участъците, намиращи се върху наклонените равнини, имаме:

(4) $$\frac{mg(1-k)}{2}\sin\alpha + T = f\,;$$

(5) $$R = \frac{mg(1-k)\cos\alpha}{2}\,.$$

Дължината l_1 (съответно отношението k) е максимална, когато силата на триене f приема своята максимална възможна стойност:

(6) $$f = \mu R\,.$$

Така получаваме:

(7) $$\frac{mg(1-k)}{2}\sin\alpha + \frac{mgx}{2\sin\alpha} = \frac{\mu mg(1-k)}{2}\cos\alpha\,,$$

откъдето:

(8) $$k = \frac{(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\alpha}{1 + (\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\alpha}\,.$$

Б) В момента $t = 0$ дължината на провесената част е $x(0) = \ell/2$. От друга страна, от закона за движение имаме $x(0) = A\cosh(0) = A$. Следователно:

(9) $$A = \ell/2\,.$$

Константата k ще намерим от закона за запазване на енергията. Избираме хоризонталната повърхност като нулево ниво на потенциалната енергия. Масата на провесената част е $m_1 = m\,x/\ell$, а височината на центъра й спрямо нулевото ниво е $h = -x/2$. Следователно потенциалната енергия на шнура като функция на времето е:

(10) $$E_p = -\frac{mgx^2}{2\ell} = -\frac{mg\ell}{8}\cosh^2(kt)\,.$$

Кинетичната енергия на шнура е:

(11) $$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\ell^2k^2}{8}\sinh^2(kt)\,,$$

защото всичките му точки се движат с една и съща скорост $v = \dot{x} = kA\sinh(kt)$. От закона за запазване на енергията следва равенството:

(12) $$\frac{m\ell^2k^2}{8}\sinh^2(kt) - \frac{mg\ell}{8}\cosh^2(kt) = -\frac{mg\ell}{8}\,,$$

което е изпълнено тъждествено, ако:

(13) $$k = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,.$$

Шнурът се отделя от масата в момента, когато $x(\tau) = \ell$, т.е.

(14) $$\cosh(k\tau) = 2\,.$$

Полагаме $y = \exp(k\tau)$, откъдето получаваме уравнението:

(15) $$y^2 - 4y + 1 = 0\,.$$

Избираме корена $y > 1$ на квадратното уравнение, защото той съответства на $\tau > 0$:

(15) $$y = 2 + \sqrt{3}\,.$$

Следователно:

(16) $$\tau = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\ln(2 + \sqrt{3})\,.$$

В) В1. За първото трептене бихме могли да пренебрегнем изкривяването на шнура, т.е. да го разглеждаме като люлееща се твърда пръчка с инерчен момент:

$$I = 1/3\,m\ell^2$$

спрямо точката на окачване и разстояние:

$$d = \frac{\ell}{2}$$

от центъра на масата до точката на окачване. От формулата за честота на физично махало намираме:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \approx 1.225\sqrt{\frac{g}{\ell}} .$$

Полученият отговор се различава от точния с около 2%, което е в рамките на допустимата грешка.

В2. Движението, което извършва участъкът от шнура, намиращ се под първия възел, може да се разглежда като най-нискочестотното трептене на шнур с дължина $\ell – x_1$. Следователно:

$$1.202\sqrt{\frac{g}{\ell - x_1}} = 2.760\sqrt{\frac{g}{\ell}} ,$$

откъдето:

$$x_1 = \left[1 - \left(\frac{1.202}{2.760}\right)^2\right]\ell = 0.810\ell .$$

Аналогично, за третото трептене движението на частта от шнура под най-горния възел може да се разглежда като второто по честота трептене на шнур с дължина $\ell – x_2$, т.е.

$$2.760\sqrt{\frac{g}{\ell - x_2}} = 4.327\sqrt{\frac{g}{\ell}} ;$$

$$x_2 = \left[1 - \left(\frac{2.760}{4.327}\right)^2\right]\ell = 0.593\ell .$$

Задача 2. Изгаряне на метеорит в атмосферата

А) Ако пренебрегнем разликата между средноквадратична и средна скорост, имаме:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}k_{\text{B}}T ,$$

където $m = \mu/N_A$ е масата на една молекула. Като вземем предвид, че $k_B = R/N_A$, намираме:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 491\,\text{m/s} .$$

Б) От II принцип на механиката имаме за движението на Земята около Слънцето:

$$\frac{m_E v_E^2}{a} = \gamma\frac{m_E M}{a^2} ,$$

където m_{E} е масата на Земята, M – масата на Слънцето, а a – радиусът на земната орбита. Оттук намираме:

$$v_E = \sqrt{\gamma\frac{M}{a}} .$$

Нека означим масата на метеорита преди на навлезе в земната атмосфера с m_0, а скоростта му спрямо Слънцето – с v_m. От закона на запазване на енергията имаме:

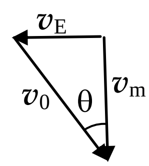
$$\frac{m_0 v_m^2}{2} = \gamma \frac{M m_0}{a}.$$

Оттук получаваме:

$$v_m = \sqrt{2\gamma \frac{M}{a}} = \sqrt{2} v_E.$$

Скоростта на метеорита спрямо Земята е $\vec{v}_0 = \vec{v}_m - \vec{v}_E$ (виж фигурата), т.е. има големина:

$$v_0 = \sqrt{v_E^2 + v_m^2} = v_E \sqrt{3} = 52 \text{ km/s}$$



и сключва ъгъл с вертикалата:

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_m}{v_0}\right) = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = 35^\circ.$$

В) Разглеждаме удара между молекула на въздуха и метеорита в отправна система, свързана с метеорита. Тъй като ударът е идеално нееластичен, а масата M на метеорита е много по-голяма от масата m на една молекула, количеството топлина q, отделена при един удар, е равно на кинетичната енергия на падащата молекула:

$$q = \frac{m v^2}{2}.$$

За време t в метеорита се удрят молекулите, заемащи обем:

$$V = \pi r^2 v t.$$

Броят на тези молекули е:

$$N = nV = (\rho_a/m)\pi r^2 v t,$$

където $n = (\rho_a/m)$ е обемната концентрация на молекулите. Общата отделена топлина за това време е:

$$Q = Nq = \frac{\rho_a \pi r^2 v^3}{2} t,$$

а мощността:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{\rho_a \pi r^2 v^3}{2}.$$

Г) Нека за малък интервал от време $\mathrm{d}t$ от метеорита се изпарява тънък сферичен слой с дебелина $-\mathrm{d}r$ ($\mathrm{d}r < 0$). Обемът на изпарения слой е $\mathrm{d}V = -4\pi r^2 \mathrm{d}r$, а масата му:

$$\mathrm{d}M = -4\pi\rho_m r^2 \mathrm{d}r.$$

За изпарението на слоя е нужно количество топлина:

$$\mathrm{d}Q = L\mathrm{d}M = -4\pi\rho_m L r^2 \mathrm{d}r.$$

От уравнението за топлинен баланс имаме:

$$\mathrm{d}Q = \eta P \mathrm{d}t \text{ или } -4\pi r^2 \rho_m L \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta \rho_a \pi r^2 v^3}{2},$$

откъдето получаваме:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\eta \rho_a v^3}{8\rho_m L}.$$

Д) Приемаме, че скоростта на метеорита е постоянна по големина и по посока. За време dt височината на метеорита се променя с:

$$\mathrm{d}h = -v_0 \cos\theta \mathrm{d}t = -\sqrt{2} v_E \mathrm{d}t.$$

Следователно промяната на радиуса на метеорита с височината се описва с уравнението:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h} = \frac{\eta \rho_a v_0^2}{8\rho_m L \cos\theta} = \frac{3\sqrt{6}\eta \rho_a v_E^2}{16\rho_m L}.$$

От уравнението за хидростатично равновесие на атмосферата имаме:

$$\mathrm{d}p = -\rho_a g \mathrm{d}h.$$

Следователно, промяната на радиуса на метеорита с височината е свързана със съответната промяна на атмосферното налягане по траекторията на метеорита:

$$\mathrm{d}r = -\frac{3\sqrt{6}\eta v_E^2}{16\rho_m L g} \mathrm{d}p.$$

Нека в атмосферата навлиза метеорит с радиус $r_{\min}$. Когато достигне земната повърхност, метеоритът изгаря напълно, т.е. $r = 0$ и съответно $\Delta r = -r_{\min}$. От друга страна, във високите слоеве на атмосферата, където започва изгарянето на метеорита, атмосферното налягане е практически равно на нула, а на земната повърхност е равно на p_0, т.е. $\Delta p = p_0$. Следователно:

$$r_{\min} = \frac{3\sqrt{6}\eta v_E^2 p_0}{16\rho_m L g} = 44 \text{ m}.$$

Задача 3. Радар

А) За да бъде регистриран, отразеният импулс трябва да се върне в радара след време, по-голямо от продължителността на импулса:

$$\frac{2R}{c} \geq \tau.$$

Следователно за минималното разстояние получаваме:

$$R_{\min} = \frac{c\tau}{2} = 150 \text{ m}.$$

Б) Пространственият ъгъл, в който е съсредоточено излъчването на радара се определя от ъгъла на дифракционна разходимост:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D} \approx 3 \times 10^{-2} \text{ rad}.$$

Тъй като θ << 1, можем да използваме приближението:

$$\Omega = 4\pi\sin^2(\theta/2) \approx \pi\theta^2 = \frac{1.49\pi\lambda^2}{D^2} = 2.93\times10^{-3}\text{strad}.$$

Съответно яркостта на радара е:

$$B = \frac{P_0}{\Omega} = \frac{P_0 D^2}{1.49\pi\lambda^2} = 34\ \text{MW/strad}.$$

В) Пространственият ъгъл, под който радарът „вижда” сферата се определя от нейното напречно сечение:

$$\Omega_\text{s} = \frac{\pi a^2}{R^2}.$$

Съответно върху сферата пада и изцяло се отразява мощност:

$$P_\text{r} = B\Omega_\text{s} = \frac{P_0 D^2 a^2}{1.49\lambda^2 R^2}.$$

Отразените лъчи сключват с падащите лъчи ъгли, които варират от 0 за лъчите, допиращи се до сферата, до 180° за лъчите, които се отразяват в обратна посока. Следователно отразената от сферата вълна се разпространява изотропно в рамките на пълния пространствен ъгъл:

$$\Omega_\text{r} = 4\pi.$$

Г) По отношение на отразената вълна, сферата е източник с яркост:

$$B_\text{r} = \frac{P_\text{r}}{\Omega_\text{r}} = \frac{P_0 D^2 a^2}{5.96\pi\lambda^2 R^2}.$$

Входният отвор на радара се вижда под пространствен ъгъл $\frac{\pi D^2}{4R^2}$. Следователно, мощността, която пада върху параболичната антена и се фокусира върху детектора, е:

$$P_\text{d} = \frac{P_0 D^4 a^2}{23.84 R^4 \lambda^2}$$

Д) За да може детекторът да регистрира отразената вълна е нужно:

$$P_\text{d}\tau \geq \frac{3}{2}k_\text{B}T$$

или

$$\frac{P_0 D^4 a^2 \tau}{23.84 R^4 \lambda^2} \geq \frac{3}{2}k_\text{B}T$$

Оттук определяме максималното разстояние, на което сферата може да бъде регистрирана от радара:

$$R_\text{max} = 0.17D\sqrt[4]{\frac{P_0\tau}{k_\text{B}T}}\sqrt{\frac{a}{\lambda}} \approx 107\ \text{km}.$$