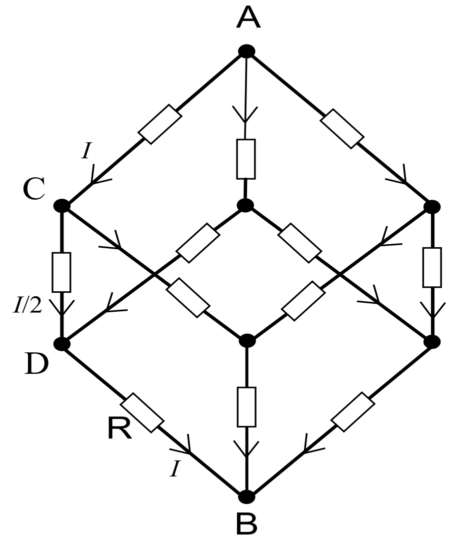
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 9. клас - решения

Задача 1. *Електрическа схема*

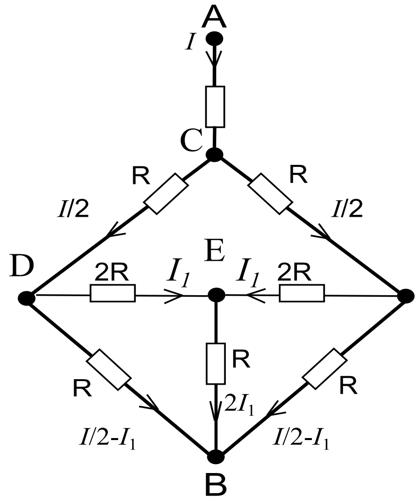


а) Схемата е показана вдясно **[0.5т]**. Нека в т. А влиза ток $3I$. Поради симетрията, токът се разделя на три равни части, така че по клона А-С тече ток с големина I. Във възел С, отново от съображения за симетрия, токът се дели на две равни части и по клона C-D тече ток $I/2$. По клона D-B тече ток I **[1т]**.

Нека да сумираме потенциалните разлики по контура A-C-D-B. Имаме $U = U_{\text{AC}} + U_{\text{CD}} + U_{\text{DB}} = R_{\text{AB}} 3I$ **[0.5т]**, където U е напрежението между т. А и т. В. Така получаваме $R_{\text{AB}} 3I = RI + RI/2 + RI$, т.е. $R_{\text{AB}} = 5R/6$ **[1т]**.

(Друг подход е да се разгледа еквивалентна схема от последователно свързани резистори с големина R/3, R/6 и R/3.)

б) Кондензаторът се зарежда до напрежение U_{AC}, което е равно на RI **[1т]**. За заряда намираме $q = CU = CRI$ **[0.5т]**. Изразяваме I чрез U и R: $U = R_{\text{AB}} 3I \Rightarrow I = {}^{2U}\!/_{5R}$ **[0.5т]**. Така получаваме $q = \dfrac{2}{5} CU$ **[1т]**.



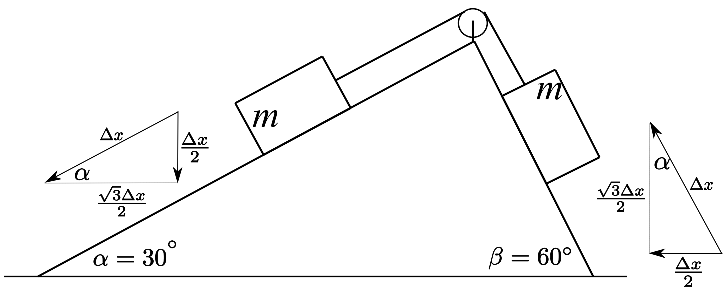
в) Еквивалентната схема е показана вдясно **[1т]**.

Отново сумираме напреженията на отделните участъци. Получаваме $U = U_{\text{AC}} + U_{\text{CD}} + U_{\text{DB}} = RI + RI/2 + R(I/2 - I_1)$ **[1т]**. Токът I_1 намираме от равенството: $U_{\text{DB}} = U_{\text{DE}} + U_{\text{EB}}$ **[0.5т]**. Така намираме $R(I/2 - I_1) = 2RI_1 + R2I_1$, т.е. $I_1 = I/10$ и $U = \dfrac{19}{10} RI$ **[0.5т]**. Следователно $R_{\text{AB}} = \dfrac{U}{I} = \dfrac{19}{10} R$ **[1т]**.

Задача 2. *Механика*

Ще използваме изцяло енергетичен подход. Друг възможен метод е чрез използване на сили.

а)



Фиг. 2

Тъй като телата се движат с постоянна скорост v, за време Δt те изминават разстояние $\Delta x = v\Delta t$ по наклонените повърхности. Така лявото тяло се спуска с $H_1 = \Delta x / 2$ **[0.5т]** (срещулежащият катет на ъгъл от 30° е наполовина по-къс от хипотенузата, виж фиг. 2), а дясното тяло се изкачва с $H_2 = \Delta x\sqrt{3}/2$ **[0.5т]** (използваме Питагоровата теорема). Промяната в енергията на системата за време Δt е $\Delta E = -mg\Delta H_1 + mg\Delta H_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}mg\Delta x$ **[1т]**. Така за мощността получаваме

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}mgv. \text{ [1т]}$$

За тока получаваме

$$I = \frac{P}{U} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{mgv}{U}. \text{ [1т]}$$

б) След време t тялото е изминало разстояние $x = gt^2/2$, съответстващо на относителна височина $H = \frac{x}{2} = \frac{gt^2}{4}$ **[0.5т]**, и се движи със скорост $v = gt$ **[0.5т]**. Енергията на тялото се дава с израза

$$E = mgH + \frac{mv^2}{2}, \text{ [1т]}$$

което е равно на

$$E(t) = \frac{3}{4}mg^2t^2. \text{ [1т]}$$

За мощността имаме $P = \frac{E(t+\Delta t) - E(t)}{\Delta t}$, където Δt е пренебрежимо малък интервал от време. Получаваме $P = \frac{3}{4}mg^2\frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{3}{4}mg^2\frac{\Delta t(2t+\Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{3}{2}mg^2t.$ **[1т]**

в) При спускане с височина H тялото губи потенциална енергия, част от която се превръща в кинетична енергия, а останалата част се превръща в енергия на кондензатора **[1т]**. Имаме $mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$, откъдето получаваме

$$q = \sqrt{C(2mgH - mv^2)} \text{ [1т].}$$

<u>Задача 3. *Кондензатори*</u>

а) Енергията на кондензатор с капацитет C и напрежение U се дава с израза

$$W = \frac{CU^2}{2}. \text{ [0.5т]}$$

Капацитетът на кондензатора е

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \text{ [0.25т]}$$

а напрежението му е

$$U = Ed. \text{ [0.25т]}$$

За енергията получаваме

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}Sd. \text{ [1т]}$$

За плътността на енергията имаме $w = \frac{W}{V}$, където V е обемът, заграден от плочите на кондензатора, $V = Sd$. Получаваме

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \text{ [0.5т]}$$

б) Зарядите на кондензаторите са $q_1 = C_1U_1$ и $q_2 = C_2U_2$ **[0.5т]**, като по условие имаме $q_1 > q_2$. Зарядът в електродите на получения кондензатор е q и $-q$, като $q = q_1 + q_2$ **[0.5т]** за случая от фиг. 3а и $q = q_1 - q_2$ за случая от фиг. 3б **[0.5т]**. При свързването q се разпределя между кондензаторите, като $q = q_1^{'} + q_2^{'}$, където $q_1^{'}$ и $q_2^{'}$ са зарядите на кондензаторите след свързването. Зарядът се разпределя така, че напрежението $U^{'}$ на кондензаторите да е равно. Това налага условието

$$U^{'} = \frac{q_1^{'}}{C_1} = \frac{q_2^{'}}{C_2}. \ \textbf{[0.5т]}$$

Така получаваме

$$q_1^{'} = C_1\frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 0.5 \ \mu C, \ q_2^{'} = C_2\frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 1 \ \mu C \text{ за фиг. 3а; } \textbf{[0.5т]}$$

$$q_1^{'} = C_1\frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} \approx 0.17 \ \mu C, \ q_2^{'} = C_2\frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} \approx 0.33 \ \mu C \text{ за фиг. 3б. } \textbf{[0.5т]}$$

За напрежението получаваме

$$U^{'} = \frac{C_1U_1 + C_2U_2}{C_1 + C_2} = 0.5 \ \text{V за фиг. 3а; } \textbf{[0.5т]}$$

$$U^{'} = \frac{C_1U_1 - C_2U_2}{C_1 + C_2} \approx 0.17 \ \text{V за фиг. 3б. } \textbf{[0.5т]}$$

в) Енергията, която се губи при свързване, е $\Delta W = W_1 - W_2$, където W_1 е началната енергия на системата от двата кондензатора, а W_2 е крайната. Имаме

$$W_1 = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} \ \textbf{[0.25т]}$$

и $W_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2)U^{'2}$, т.е.

$$W_2 = \frac{(C_1U_1 + C_2U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \text{ за фиг. 3а; } \textbf{[0.5т]}$$

$$W_2 = \frac{(C_1U_1 - C_2U_2)^2}{2(C_1 + C_2)} \text{ за фиг. 3б. } \textbf{[0.5т]}$$

Така получаваме

$$\Delta W = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}(U_1 - U_2)^2 \approx 0.19 \ \mu J \text{ за фиг. 3а; } \textbf{[1т]}$$

$$\Delta W = \frac{C_1C_2}{2(C_1 + C_2)}(U_1 + U_2)^2 \approx 0.52 \ \mu J \text{ за фиг. 3б. } \textbf{[1т]}$$

Условието, при което енергията на системата от фиг. 3а няма да се промени при свързване, е

$$U_1 = U_2. \ \textbf{[0.25т]}$$