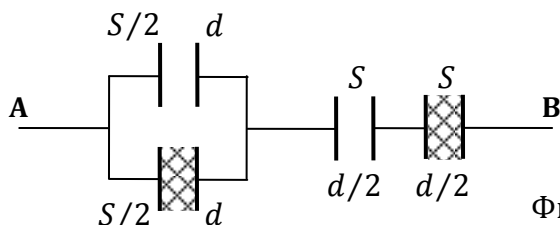


МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Решения на темата за 11.-12. клас

Задача 1. Кондензатори



Фиг. 1

а) Еквивалентната схема на свързване е показана на фиг. 1. Левият кондензатор от условието е еквивалентен на системата от успоредно свързани кондензатори, а десният отговаря на двата последователно свързани кондензатори. Капацитетът на левия кондензатор е равен на

$$C_L = \frac{\epsilon_0 S}{2d} + \frac{\epsilon_0 \epsilon S}{2d} = \frac{\epsilon_0 (\epsilon + 1) S}{2d} \quad [0,5 \text{ т}], \text{ а капацитетът на десния е } C_R = \frac{2\epsilon_0 \epsilon S}{d(\epsilon + 1)}. \quad [1 \text{ т}]$$

Да разгледаме израза $C_L - C_R = \frac{\epsilon_0 S}{2(\epsilon + 1)d} [(\epsilon + 1)^2 - 4\epsilon] = \frac{\epsilon_0 (\epsilon - 1)^2 S}{2(\epsilon + 1)d} > 0$. [1 т] Оттук следва, че левият кондензатор е с по-голям капацитет от десния. [0,5 т]

б) Дадено е, че капацитетът на единия от кондензаторите е двойно по-голям от капацитета на другия кондензатор, т.е. $C_L = 2C_R$. Получаваме, че $\frac{\epsilon_0 (\epsilon + 1) S}{2d} = \frac{4\epsilon_0 \epsilon S}{d(\epsilon + 1)}$. [0,5 т]

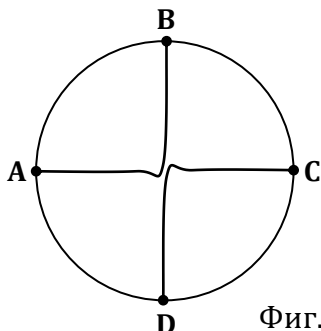
Оттук следва квадратично уравнение за ϵ от вида $\epsilon^2 - 6\epsilon + 1 = 0$. [0,5 т] Т.е. $\epsilon = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5,8$. [1 т] Така за капацитета на цялата система се получава $C = \frac{C_L C_R}{C_L + C_R} = \frac{2C_R}{3}$

$$\frac{4\epsilon_0 \epsilon S}{3d(\epsilon + 1)} \approx 2,5 \text{ nF}. \quad [2 \text{ т}]$$

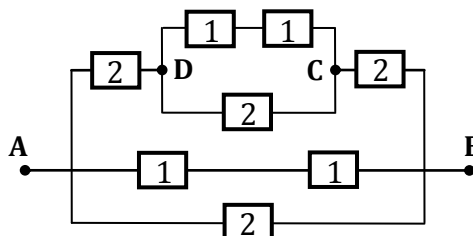
в) Двата кондензатора са свързани последователно, от което следва, че имат еднакви заряди $q = CU \approx 76 \text{ nC}$. [1 т] Общата енергия, натрупана в кондензаторите, е $W = \frac{CU^2}{2} \approx 1,1 \mu\text{J}$. [1 т]

г) Честотата на свободните електромагнитни трептения в електрическата верига се дава от формулата $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 32 \text{ kHz}$. [1 т]

Задача 2. Проводяща окръжност



Фиг. 2а

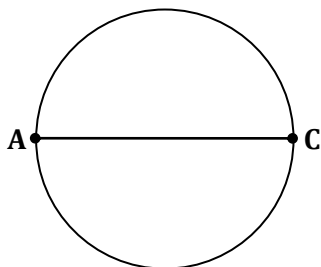


Фиг. 2б

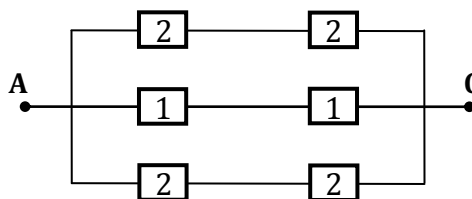
а) В този случай конфигурацията от токове в електрическата верига е симетрична спрямо равнината, перпендикулярна на правата, свързваща точките А и В, и минаваща

през центъра на правата. Това позволява да разкачим централния контакт по начина, показан на фиг. 2а. [1 т] При това положение имаме система от последователно и успоредно свързани резистори с еквивалентна схема, показана на фиг. 2б. [1 т] Резисторите, означени с „1“, имат съпротивление $R_1 = \lambda r$, а резисторите, означени с „2“, имат съпротивление $R_2 = \pi \lambda r / 2$. [0,5 т] Съпротивлението, което ще се измери между точките А и В, е равно на $R_{AB} = \frac{2R_1R_2(R_{CD}+2R_2)}{2R_1R_2+2R_1(R_{CD}+2R_2)+R_2(R_{CD}+2R_2)}$ [1 т], където $R_{CD} = \frac{2R_1R_2}{2R_1+R_2}$. След опростяване се получава, че $R_{AB} = \frac{2\pi(\pi+6)\lambda r}{(\pi+4)(\pi+8)}$. [0,5 т]

б) Напрежението между точките С и D е $U_{CD} = \frac{R_{CD}\varepsilon}{R_{CD}+2R_2} = \frac{R_1\varepsilon}{3R_1+R_2} = \frac{2\varepsilon}{\pi+6}$. [1 т]

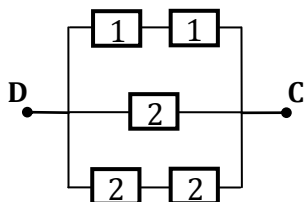


Фиг. 3а



Фиг. 3б

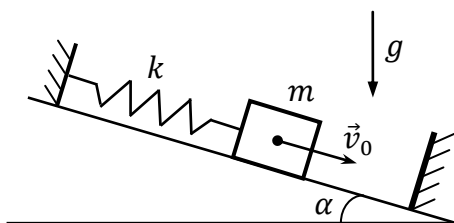
в) В този случай имаме симетрия спрямо равнината, перпендикулярна на правата, свързваща точките А и С, и минаваща през центъра на правата. [0,5 т] Получава се ефективната верига на фиг. 3а. [0,5 т] Тя отговаря на система от последователно и успоредно свързани резистори с еквивалентна схема, показана на фиг. 3б. [0,5 т] Отново резисторите, означени с „1“, имат съпротивление $R_1 = \lambda r$, а резисторите, означени с „2“, имат съпротивление $R_2 = \pi \lambda r / 2$. Съпротивлението, което ще се измери между точките А и С, е равно на $R_{AC} = \frac{2R_1R_2}{2R_1+R_2}$. [1 т] След опростяване се получава, че $R_{AC} = \frac{2\pi\lambda r}{\pi+4}$. [0,5 т]



Фиг. 4

г) Ако точките А и В са свързани накъсо, от схемата на фиг. 2б се получава схемата на фиг. 4. [0,5 т] Съпротивлението, което ще се измери между точките С и D, е равно на $R'_{CD} = \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}$. [1 т] След опростяване се получава, че $R'_{CD} = \frac{2\pi\lambda r}{\pi+6}$. [0,5 т]

Задача 3. Трупче на пружина



Фиг. 5

а) От закона за запазване на механичната енергия следва, че $\frac{mv_0^2}{2} + mgl \sin \alpha = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kl^2}{2}$ [1 т], където l е разстоянието между началното положение на трупчето и стената. Разстоянието l се намира от условието, че стената се намира там, където скоростта на трупчето е максимална, т.е. трупчето е с нулево ускорение и резултантната сила е нула, откъдето $mg \sin \alpha - kl = 0$ [0,5 т] и $l = mg \sin \alpha / k$.

[0,5 т] Оттук следва, че големината на скоростта на трупчето в момента, когато то се удря в стената, е $v_1 = \sqrt{v_0^2 + mg^2 \sin^2 \alpha / k} \approx 0,85 \text{ m/s}$. [1 т]

б) При идеално еластичен удар трупчето не губи кинетична енергия. Като използваме отново закона за запазване на механичната енергия, ще получим, че $\frac{mv_0^2}{2} + mgl \sin \alpha = \frac{k(l_{\max}-l)^2}{2} + mgl_{\max} \sin \alpha$ [1 т], където l_{\max} е максималното разстояние от стената, на което ще се отдалечи трупчето. След решаване на полученото квадратно уравнение имаме, че

$$l_{\max} = \frac{mg \sin \alpha}{k} \sqrt{1 + \frac{kv_0^2}{mg^2 \sin^2 \alpha}} \approx 12 \text{ cm. [1 т]}$$

в) За да намерим средната скорост на движение на трупчето, ни трябва времето за достигане до горно крайно положение. Използваме, че трупчето извършва хармонично трептене, като равновесното положение е при удара в стената, т.е. от стената до горно крайно положение трупчето изминава четвърт период [0,5 т] и съответното време е

$$t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{m}{k}}. [0,5 т] \text{ Средната скорост е } \bar{v} = l_{\max}/t = \frac{2g \sin \alpha}{\pi} \sqrt{\frac{m}{k} + \frac{v_0^2}{g^2 \sin^2 \alpha}} \approx 0,54 \text{ m/s. [1 т]}$$

г) При нееластичния удар кинетичната енергия на трупчето намалява $1/\eta^2$ пъти [0,5 т] и от закона за запазване на механичната енергия получаваме връзката: $\frac{m\eta^2 v_1^2}{2} + \frac{kl^2}{2} =$

$\frac{k(l'-l)^2}{2} + mgl' \sin \alpha$ [1 т], където l' е разстоянието на максимално отдалечаване на трупчето от стената между първия и втория удар в нея, като $l' = l$ по условие, т.е.

$$\frac{m\eta^2}{2} (v_0^2 + mg^2 \sin^2 \alpha/k) + \frac{kl^2}{2} = mgl \sin \alpha. [0,5 т] \text{ Оттук следва, че } \eta = \left(1 + \frac{kv_0^2}{mg^2 \sin^2 \alpha}\right)^{-1/2} \approx 0,81. [1 т]$$