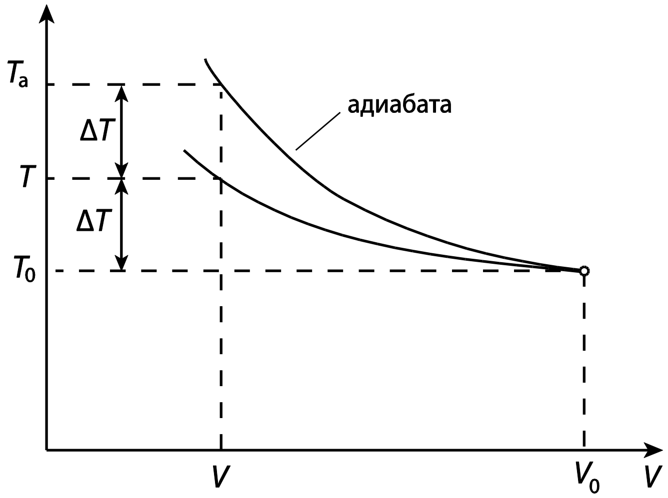
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО ФИЗИКА
Враца, 7 април 2015 г.
Решения на задачите от темата за 10.–12. клас – II етап

Задача 1. Процеси с идеален газ



А) За правилна диаграма (вж. чертежа) ………………………………1 *точка*

Б) По условие

(1) $T = \dfrac{T_0}{2} + \dfrac{T_a}{2}$.

От уравнението на адиабатния процес $T_a V^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1}$ изразяваме температурата T_a, заместваме я в равенство (1) и получаваме

(2) $T = \dfrac{T_0}{2}\left\{1 + \left(\dfrac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1}\right\}$. ……………………………………………… 1 *точка*

От уравнението на състоянието на идеален газ $pV = nRT$ изразяваме температурата T, заместваме я в равенство (2) и получаваме търсеното уравнение на процеса:

(3) $p = \left(\dfrac{nRT_0}{2}\right)V^{-1} + \left(\dfrac{nRT_0V_0^{\gamma-1}}{2}\right)V^{-\gamma}$ ……………………………………… 1 *точка*

В) Моларният топлинен капацитет на газа е

(4) $C = \dfrac{\Delta Q}{n\Delta T} = \dfrac{nC_v\Delta T + p\Delta V}{n\Delta T} = C_v + \dfrac{p\Delta V}{n\Delta T}$.

От уравнение (2) определяме

$$\Delta T = \frac{T_0 V_0^{\gamma-1}}{2}\left\{\left(V+\Delta V\right)^{1-\gamma} - V^{1-\gamma}\right\} =$$

$$\frac{T_0 V_0^{\gamma-1} V^{1-\gamma}}{2}\left\{\left(1+\frac{\Delta V}{V}\right)^{1-\gamma} - 1\right\} = \frac{T_0(1-\gamma)}{2V_0}\left(\frac{V_0}{V}\right)^{-\gamma}\Delta V,$$

където сме използвали приближението $(1+x)^n \approx 1+nx$ при $x << 1$. Заместваме ΔT в (4) и получаваме

(5) $$C = C_V + \frac{2pV_0}{(1-\gamma)nT_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma}$$ ....1 *точка*

Забележка. Ще получим същия резултат, ако пресметнем производната $\mathrm{d}T/\mathrm{d}V$.

Изразяваме налягането p от уравнението на състоянието на идеалния газ $p = nRT/V$:

(6) $$C = C_V + \frac{2RT}{(1-\gamma)T_0}\left(\frac{V}{V_0}\right)^{\gamma-1}.$$

От равенство (2) следва, че $\left(\frac{V_0}{V}\right)^{\gamma-1} = \frac{2T}{T_0} - 1$ и като отчетем, че

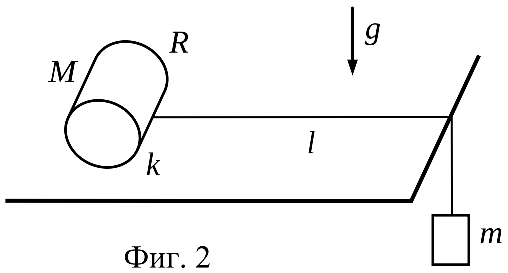
$1-\gamma = 1-\frac{C_p}{C_V} = \frac{C_V - C_p}{C_V} = -\frac{R}{C_V}$, за топлинния капацитет получаваме

(7) $$C = -\frac{C_V}{2\frac{T}{T_0} - 1}$$ ....1 *точка*

Следователно моларният топлинен капацитет на идеалния газ при разглеждания процес зависи от температурата. Той има отрицателна стойност. Тъй като в случая $\Delta T > 0$ – при свиването на газа температурата нараства, съгласно формула (4) от $C < 0$ следва, че $\Delta Q < 0$,
т.е. газът отдава топлина на околната среда. Външните сили извършват положителна работа и предават енергия на газа. Част от тази енергия отива за увеличаване на вътрешната енергия на газа – той се нагрява, а останалата част се отдава под формата на топлина на околната среда..1 *точка*

Г) Като отчетем, че хелият е едноатомен газ, заместваме в уравнение (7)
$C_V = \frac{3}{2}R,\ T = \frac{3}{2}T_0$ и получаваме $C = -\frac{3}{4}R$..1 *точка*

<u>Задача 2.</u> Търкалящ се цилиндър



Фиг. 2

А) Уравнението за движение на теглилката е $mg - T = ma$ **[0,5 т]**, където T е силата на опън на нишката, а a е ускорението на теглилката. Уравнението за постъпателно движение на цилиндъра е $T - kMg = Ma'$ **[0,5 т]**, където a' е транслационното ускорение на цилиндъра. За въртенето на цилиндъра около моментната му ос на въртене, която минава през неговата геометрична ос на симетрия, се изпълнява уравнението: $(T - kMg)R = I\varepsilon = I(a - a')/R$. **[1 т]** От това уравнение следва, че $2(T - kMg) = M(a - a')$. **[0,5 т]** Като се реши тази система от три уравнения спрямо трите неизвестни a, a' и T, се получава, че $a = \dfrac{3g(m - kM)}{3m + M}$ и $a' = \dfrac{g(m - kM)}{3m + M}$. **[2 т]** За да има движение, трябва ускоренията да са по-големи или равни на нула. Т.е. максималната стойност на коефициента на триене е $k_{\max} = \dfrac{m}{M}$. **[0,5 т]**

б) Движенията на цилиндъра и теглилката са равноускорителни без начална скорост, откъдето следва, че $h = at^2/2$ и $l = a't^2/2$. **[0,5 т]** Като разделим двете уравнения едно на друго, получаваме, че $h = al/a' = 3l$. **[0,5 т]** Големината на скоростта на теглилката в този момент е $v = at = a\sqrt{2l/a'} = 3\sqrt{\dfrac{2gl(m - kM)}{3m + M}}$. **[1 т]**

<u>Задача 3.</u> Снимки на хвърлено тяло.

А) За тяло, хвърлено с начална скорост v_1 под ъгъл α_1 спрямо хоризонта в координатна система с център положение 1, можем да запишем: $v_{1x} = v_1 \cos\alpha_1$, $v_{1y} = v_1 \sin\alpha_1$, $x = v_1 \cos\alpha_1\, t$, $y = v_1 \sin\alpha_1\, t - \frac{1}{2} g t^2$, откъдето
$y = \tan\alpha_1 x - \frac{g}{2{v_1}^2(\cos\alpha_1)^2} x^2$ **[0,5 т.]** или $y = ax - bx^2$, където $a = \tan\alpha_1$ и $b = \frac{g}{2{v_1}^2(\cos\alpha_1)^2}$. В координатна система с център позиция 1, позиция 2 има координати (0,8 m; 0,4 m), **[0,5 т.]** а позиция 3 има координати (1,2 m; 0,45 m). **[0,5 т.]** Заместваме в уравнението на траекторията: $0{,}4 = 0{,}8a - 0{,}64b$ и $0{,}45 = 1{,}2a - 1{,}44b$. Решавайки тези две уравнения с две неизвестни, получаваме решение a = 0,75 (3/4) , b = 0,3125 (5/16). **[0,5 т.]** От тези стойности се получава $\tan\alpha_1 = 3/4$ **[0,5 т.]** и v_1 = 5 m/s. **[0,5 т.]**

Б) От закона за запазване на механичната енергия (или от кинематични зависимости) се получава ${v_{0y}}^2 = {v_{1y}}^2 + 2gy_1$, откъдето при $y_1 = 0{,}35$ m, $v_{0y} = 4$ m/s. Тъй като $v_{0x} = v_{1x} = 4$ m/s, $v_0 = 4\sqrt{2} \approx 5{,}7$ m/s, **[0,5 т.]** а $\alpha_0 = 45^{\circ}$. **[0,5 т.]** За да намерим координатата x_0 , трябва да намерим времето на полет от положение 0 до положение 1. $y_1 = v_0 \sin\alpha_0\, t_1 - \frac{1}{2} g {t_1}^2$, $0{,}35 = 4t_1 - 5{t_1}^2$, откъдето $t_1 = 0{,}1$ s, а $x_1 = v_0 \cos\alpha_0\, t_1$ = 0,4 m. Следователно в дадената на фигурата координатна система
x_0= - 0,3 m. **[1 т.]**

В) При получен вече момент време $t_1 = 0{,}1$ s, $t_2 = t_1 + \frac{x_2 - x_1}{v_{0x}}$ = 0,3 s **[0,5 т.]** и $t_3 = t_1 + \frac{x_3 - x_1}{v_{0x}}$ = 0,4 s. **[0,5 т.]**