МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 02 май 2015 г., Добрич

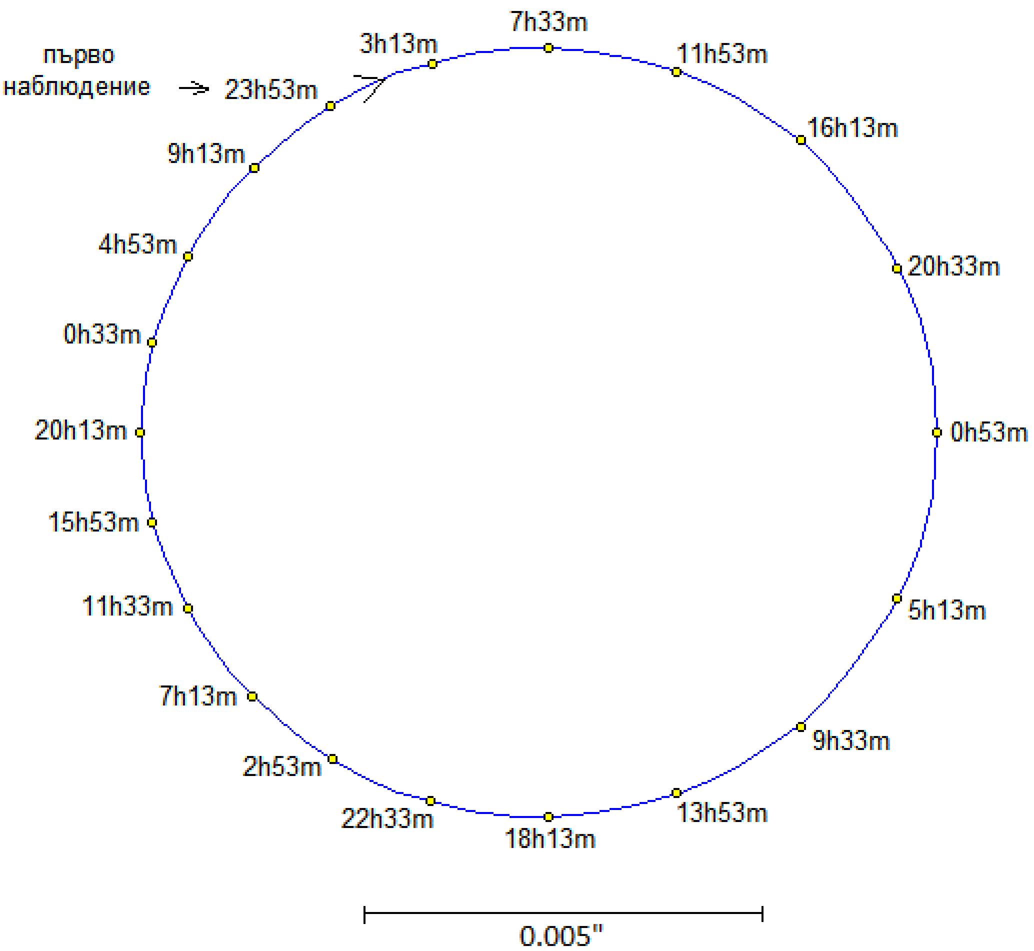
ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – XI-XII КЛАС
Теоретичен кръг
Решения

1 задача. Критична ситуация. След дълги години полет в състояние на хибернация космонавтите от екипажа на междузвезден кораб се събуждат и разбират, че са попаднали в беда. В резултат на близко прелитане покрай планета, кръжаща около черна дупка, корабът е захванат в орбита около черната дупка. С помощта на тримерния звезден атлас космонавтите откриват Слънцето – то се вижда като звезда от 6.43^m в направление, перпендикулярно към орбиталната равнина на кораба. Наблюденията им показват, че то описва паралактична елипса, която е представена на фигурата. До наблюдаваните позиции на Слънцето са дадени моментите от време. Абсолютната звездна величина на Слънцето е 4.83^m.

- А) Определете масата на черната дупка.

С най-мощния ракетен импулс, на който са способни двигателите, скоростта на кораба може да се измени с ΔV = 55 km/s. Горивото стига за два такива импулса. Минималното време за подготовка на двигателите преди всеки импулс е 40 часа.

- Б) Опишете как за най-кратко време корабът може да се освободи от гравитационната прегръдка на черната дупка и да се отправи в междузвездното пространство.



Решение:

Като сравним видимата звездна величина m_o и абсолютната звездна величина M_o на Слънцето, можем да определим разстоянието r от кораба до него. В сила е следното съотношение:

$$m - M = 5\log r - 5$$

Оттук намираме:

$$r = 20.9 \text{ pc}$$

Следователно паралаксът на Слънцето е:

$$p = \frac{1}{r} \approx 0''.04786$$

Измерваме паралактичната елипса и от дадения ъглов мащаб намирме, че нейната голяма полуос е равна на $0''.005$. Оттук намираме линейния размер на голямата полуос на орбитата на кораба около черната дупка:

$$a = \frac{0''.005}{0''.04786} \approx 0.1049 \text{ AU}$$

Означените моменти на наблюдение по паралактичната елипса са 20 на брой и наблюденията са правени през нтервал от 4 ч. 20 м. Това означава, че орбиталният период на кораба около черната дупка е $20 \times 4^h 20^m \approx 86.67^h \approx 3.6^d \approx 0.009887$ год.

Като използваме голямата полуос на орбитата на кораба в астрономически единици и орбиталния му период в земни години, можем да напишем третия закон на Кеплер във вида:

$$\frac{a^3}{T^2} = M$$

където M е масата на черната дупка в слънчеви маси. Така получаваме:

$$M \approx 11.8 \text{ слънчеви маси}$$

Слънцето се намира в посока перпендикулярна на орбиталната равнина на кораба. Това означава, че паралатичната елипса на Слънцето е геометрически подобна на орбитата на кораба. Разположението на наблюдаваните точки показва, че в перицентъра орбиталната скорост на кораба v_p е два пъти по-голяма от скоростта v_a в апоцентъра. Ако с r_p и r_a означим съответно перицентралното и апоцентралното разстояние на кораба, то съгласно втория закон на Кеплер:

$$v_p r_p = v_a r_a$$

Оттук и от съотношението на скоростите следва, че:

$$r_p : r_a = 1 : 2$$

Следователно:

$$r_p = \frac{2a}{3} \approx 0.0699 \text{ AU} \qquad\qquad r_a = \frac{4a}{3} \approx 0.140 \text{ AU}$$

Изхождайки от закона за запазването на енергията, може да се докаже, че когато увеличаваме скоростта на движещото се тяло с една и съща величина Δv в различни точки от орбитата му около някакъв гравитационен център, неговата пълна механична енергия не нараства с една и съща величина. При по-голяма първоначална скорост на тялото, след придаване на допълнителната скорост Δv се получава по-голямо увеличение на пълната енергия. Следователно най-ефективно е ускоряването на кораба да става в моментите, когато той се движи с най-голяма скорост, а именно – около перицентъра на орбитата.

Да пресметнем скоростта на кораба в перицентъра. Съгласно закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv_p^{\;2}}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_p} = -\frac{\gamma Mm}{2a}$$

$$v_p = \sqrt{\gamma M\left(\frac{2}{r_p} - \frac{1}{a}\right)} \approx 458 \text{ km/sec}$$

За да се изтръгне от гравитационното привличане на черната дупка и да се отправи в междузвездното пространство, в точката на перицентъра корабът трябва да има скорост:

$$v_p'' = \sqrt{\frac{2\gamma M}{r_p}} \approx 561 \text{ km/sec}$$

Разликата между тези скорости е:

$$v_p'' - v_p = 103 \text{ km/sec}$$

С един ракетен импулс на кораба може да се придаде допълнителна скорост $\Lambda v = 55$ km/sec и горивото стига за два такива импулса, или за увеличение на скоростта общо със 110 km/sec. Така че корабът може да бъде спасен, мака и на границата на възможностите. Добре би било, ако двата импулса се дадат един след друг в точката на перицентъра. Но е необходимо време за подготовка на двигателите 40 часа след всеки импулс. Интервалът от 40 часа е близък до половината от орбиталния период на кораба. След придаването на първия импулс в перицентъра корабът ще лети 40 часа и тогав ще е близо до апоцентъра на своята орбита, макар и този апоцентър да се отдалечи поради увеличената скорост от първия ракетен импулс. Скоростта на кораба ще е значително по-малка, отколкото в перицентъра. Ако в този момент се подаде вторият импулс, увеличението на енергията на кораба няма да е достатъчно, за да се изтръгне от гравитацията на черната дупка и горивото ще е изразходвано напразно. Ще се наложи да се изчака завръщането на кораба в перицентъра или поне достатъчно близо до перицентъра и тогава да се подаде вторият импулс.

След подаването на първия ракетен импулс скоростта на кораба в перихелия става $v_p' = 458 + 55 = 513$ km/sec. Записваме отново закона за запазване на енергията:

$$\frac{mv_p'^{2}}{2} - \frac{\gamma Mm}{r_p} = -\frac{\gamma Mm}{2a'}$$

където a' е голямата полуос на новата орбита на кораба. Оттук получаваме:

$$a' = \frac{2r_p\gamma M}{2\gamma M - v_p'^{2}} = \frac{2\gamma M}{v_p''^{2} - v_p'^{2}} \approx 0.407 \text{ AU}$$

Виждаме, че голямата полуос на орбитата се увеличава 4 пъти!
Съгласно тертия закон на Кеплер:

$$\frac{a'^3}{T'^2} = M$$

където T' е новият орбитален период.

$$T' \approx 27.6 \text{ денонощия}$$

Следователно маневрите по освобождаването на кораба от гравитационния плен на черната дупка ще отнемат близо един месец.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За определяне на разстоянието до Слънцето – 2 т.

За правилен теоретичен метод за определяне на масата на черната дупка и измерване на елипсата – 2 т.

За вярна числена стойност на масата – 1 т.

За правилен теоретичен метод за определяне на скоростта на кораба в перицентъра и измервания върху елипсата с цел определяне на съотношението на скоростите или пък на ексцентрицитета – 3 т.

За вярна числена стойност за скоростта в перицентъра – 1 т.

За правилна преценка дали горивото ще е достатъчно – 1 т.

За правилен подход при определяне на моментите на подаване на ракетните импулси – 2 т.

За правилен теоретичен метод за оценяване на необходимото време –2 т.

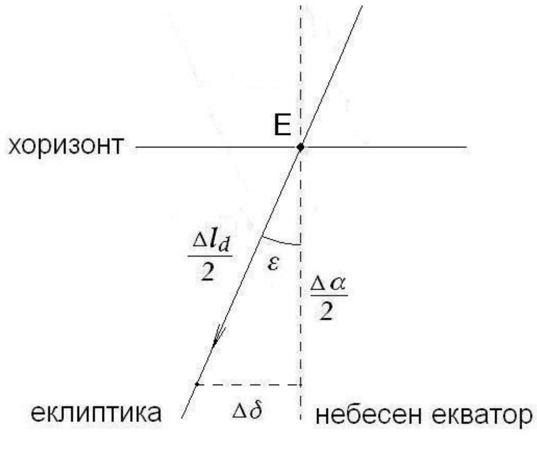
За правилна оценка на времето – 1 т.

2 задача. Позиции на Слънцето. В хода на подготовката си за астрономическата олимпиада, начинаещ участник в нея е твърде озадачен като научава, че Слънцето много рядко изгрява от изток и залязва на запад. Все пак, си казва той, в момента на пролетното равноденствие съществува едно място на екватора, където Слънцето тогава изгрява и то, точно от изток.

- А) Къде ще бъде точката на залеза на Слънцето за това място в същия ден?
- Б) Пътешествайки мислено по земния глобус, участникът в олимпиадата си представя място, където 3 дни след пролетното равноденствие Слънцето кулминира в зенита. На каква ширина е това място? Кога ще бъде следващият път, когато Слънцето отново ще кулминира в зенита за място със същата географска ширина? Дали това ще бъде същото място и по географска дължина?

Решение:

Нека се намираме в точка от екватора, в която Слънцето изгрява точно в момента на пролетно равноденствие. Ако пренебрегнем рефракцията, в момента на изгрева точката на пролетното равноденствие ще бъде на хоризонта, точно в посоката изток. След като премине точката на пролетно равноденствие, Слънцето продължава своето движение по еклиптиката, отдалечавайки се постепенно от небесния екватор. Ъгълът между еклиптиката и небесния екватор на небесната сфера, в района на точките на пролетното и есенното равноденствие, е равен на наклона на оста на Земята към оста на нейната орбита $\varepsilon = 23° \ 26'$. На екватора не само всички големи кръгове по небесната сфера, но и небесните паралели се разделят от математическия хоризонт на две равни части. Ако приемем, че Слънцето се движи със скоростта на “средното слънце”, т.е. проекцията на видимото му денонощно движение върху небесния екватор е равномерна, то ще залезе точно след 12h. Средното движение на Слънцето по еклиптиката е: $\Delta l_d = 360°/365^d.2564 = 0.9856$ °/d. За половин слънчево денонощие пътят на “средното слънце” ще бъде $\Delta l_d/2 = 0°.4928 = 29' \ 34''$.



За това време Слънцето ще се отдалечи от небесния екватор на следния ъгъл (поради малките ъглови отмествания, относно звездите, работим в планиметрично приближение чиято точност е достатъчна) :

$$\Delta\delta = \frac{\Delta l_d}{2}\sin\varepsilon \approx 0.^\circ 196 \approx 11'46''$$

Следователно може да очакваме Слънцето да залезе на север от точката “запад”, на ъглово разстояние 11′ 46″.

Това, обаче, е някакво приближение на отместването на Слънцето при залез от точката “запад”. По-правилен резултат може да очакваме да получим като уточним времето, за което Слънцето достига хоризонта на запад в първия пролетен ден. Поради наклона на еклиптиката относно хоризонта Слънцето се движи под ъгъл относно небесния екватор. Проекцията върху небесния екватор на средното движение на Слънцето по еклиптиката е:

$$\Delta\alpha = \Delta l_d \cdot \cos\varepsilon$$

Следователно ъгловата скорост на Слънцето относно небесния екватор ще бъде по-малка от средното движение по еклиптиката. Тогава Слънцето няма да залезе след 12 часа, а по-рано. Полученото съотношение между средната и моментната ъглова скорост относно небесния екватор ще използваме, за да определим след колко време Слънцето ще достигне западния хоризонт. За да получим продължителността на средното слънчево денонощие, което използвахме за приблизителното решение на задачата, изваждаме от ъгловата скорост на околоосно въртене на Земята ъгловата скорост на движението на Земята по нейната орбита около Слънцето:

$$\omega_S = \omega - \omega_Y$$
$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_Y}$$

Намаляването на моментната ъглова скорост на проекцията на движението на Слънцето по небесния екватор с фактор $\cos\varepsilon$ *може да се разглежда като удължаване на звездната година със същия коефициент. Следователно може да запишем следното равенство:*

$$\frac{1}{T'_S} = \frac{1}{T} - \frac{\cos\varepsilon}{T_Y}$$

Тогава за продължителността на слънчевото денонощие получаваме:

$$T'_S = \frac{T \cdot T_Y}{T_Y - T\cdot\cos\varepsilon}$$

Една звездна година съдържа 365.2564 слънчеви денонощия и 366.2564 звездни денонощия. Следователно продължителността на едно звездно денонощие, изразено в слънчеви денонощия е

$$T = \frac{365.2564}{366.2564} = 0.99726957 \quad \textit{средни слънчеви денонощия}$$

Тогава за продължителността на моментното слънчево денонощие получаваме:

$$T_S' = 0^{\mathrm{d}}.999774143 = 23^{\mathrm{h}}\ 59^{\mathrm{m}}\ 40^{\mathrm{s}}.5$$

Виждаме, че разликата е много малка. Коригираният резултат от приблизителните пресмятания е:

$$\Delta\delta' = 0.999774 \cdot \Delta\delta \approx 11'45''$$

Ако отчитаме рефракцията трябва да удължим денонощието. Стойността на рефракцията на хоризонта е около половин градус. Точната стойност обикновено е около $36' = 0^\circ.6$. *Земята се завърта на този ъгъл за време*

$$\Delta t = \frac{0^\circ.6}{360^\circ} \cdot T = 0^h.03989 = 0^h 02^m 23^s.6$$

Това ще удължи във времето пътя на Слънцето с удвоеното време Δt.

$$\Delta t_2 = 2 \cdot \Delta t = 0^h.079781$$

$$12^h + 0^h.079781 = 12^h.079781 = 0^d.5033242$$

$$\Delta l_d \cdot 0^d.5033242 = 0^\circ.496076 = 29'46''$$

Това е пътят, който Слънцето ще измине, преди да достигне хоризонта на запад. Ъгълът на който ще се премести по деклинация ще бъде:

$$\Delta\delta' = \Delta\delta \cdot \frac{0^\circ.4961}{0^\circ.4928} \approx 11'50''$$

Три денонощия след пролетното равноденствие, деклинацията, на която Слънцето ще се премести, ще бъде приблизително шест пъти по-голяма отколкото за 12 часа (запазваме планиметричното приближение). Географската ширина, за която Слънцето ще бъде в зенита, ще бъде числено равна на деклинацията.

$$\varphi = \delta = 6\Delta\delta \approx 1^\circ 10'30''$$

На същата географска ширина Слънцето ще кулминира в зенита приблизително три денонощия преди есенното равноденствие.

Поради това, че между пролетното и есенното равноденствие не се съдържа цял брой слънчеви денонощия и поради неравномерното движение на Земята по орбитата, тогава Слънцето няма да кулминира в зенита на същата географска дължина.

<u>Критерии за оценяване (общо 13 т.):</u>
За правилна геометрична постановка и чертеж – 3т.
За правилна математическа постановка и пресмятане на отместването по деклинация – 5т.

За правилен отговор какве е географската ширина мястото – 2т.
За правилен отговор кога е следващата кулминация в зенита на същата географска ширина – 2т
За правилен отговор за географската дължина – 1т.
(Допълнителни точки за прецизно пресмятане на моментната ъглова скорост на Слънцето и за отчитане на влиянието на рефракцията – общо 2 т.)

3 задача. Луната в океана. Вие сте на астрономическа експедиция на Луната по време на пълнолуние и забелязвате, че се вижда светло петънце на нощната страна Земята. Поглеждате с телескоп и виждате, че Земята е обърната така, че почти цялата видима част е заета от Тихия океан, който се оказва наистина много тих, без вълни, с много спокойна гладка повърхност и много чиста атмосфера, без никакви облаци над него. Светлото петънце се оказва отражението на Луната в океана. Знаете, че от Земята в момента Луната има видима звездна величина $m_{L} = -12^{m}.74$.

- Определете видимата звездна величина на отражението на Луната в Тихия океан.

При отражение от гладка повърхност между две прозрачни среди, въздух – стъкло, въздух – вода и др., се отразяват обратно около 4 процента от падналата светлина.

Решение:

Повърхността на Тихия океан играе ролята на сферично огледало. Всъщност, обърната към наблюдателя по този начин, цялата Земя може да се разглежда като огледална сфера. Знаем, че огледална сфера, осветена от успореден сноп лъчи, отразява светлината равномерно във всички посоки. Тя може да се разглежда като източник на светлина. Светлината, която Земята отразава в разглеждания случай, е равна на осветеността, която Луната създава на земната повърхност умножена на площта на диска, който отразява светлината. В случая това е площта на диска на Земята. Трябва да отчетем, че повърхността на водата отразява само 4% от падналата светлина, както и поглъщането в атмосферата на Земята. При чиста атмосфера, на морско ниво, може да приемем, че поглъщането е 20%. Светлината, обаче, преминава два пъти през земната атмосфера. Затова трябва два пъти да умножим по коефициента на пропускане на земната атмосфера, който е 0.8. Нека осветеността от Луната е E_L. Тогава светлината от Луната, която Земята ще отрази в космическото пространство, ще бъде:

$$\Phi = \pi R_E^2 \cdot k_1^2 k_2 E_L$$

където $k_1 = 0.8$ е коефициентът на пропускане на земната атмосфера, $k_2 = 0.04$ е коефициентът на отражение от водната повърхност. Тогава разликата в звездната величина между наблюдаваната на небето и отразената от океана Луна, ще бъде:

$$\Delta m = 2.5 \lg \frac{4\pi r_L^2 \cdot E_L}{\pi R_E^2 \cdot k_1^2 k_2 E_L} = 2.5 \lg \frac{4 r_L^2}{k_1^2 k_2 R_E^2} \approx 14.38$$

Тук взехме предвид, че наблюдаваме отражението на Луната от самата Луна, която е отдалечена от Земята на разстояние r_L .

Разбира се, би било по-точно, ако вземем разстоянието до наблюдателя на Луната равно на разстоянието от земната повърхност до лунната повърхност: $r_{obs} = r_L - R_E - R_L$, но това няма да промени съществено резултата, особено като имаме предвид приблизителната стойност на прозрачността на земната атмосфера, която сме приели.

Звездната величина на наблюдаваното отражение на Луната е:

$$m_{ref} = m_L + \Delta m \approx 1.6$$

<u>Критерии за оценяване (общо 14 т.):</u>

За правилни разсъждения относно отражението на лъчите от Земята – 2т.
За отчитане на поглъщането в земната атмосфера – 2т.
За правилно представяне на светлината отразена от Земята – 4т.
За правилен подход към пресмятането на звездната величина на отражението на Луната от океана – 4т
За използване на точното разстояние или правилен коментар – 1т.
За верен числен резултат – 1т.

<u>Справочни данни:</u>

Средно разстояние Земя – Луна – 384 000 км.
Радиус на Земята – 6378 км
Маса на Слънцето 2×10^{30} кг
Гравитационна константа 6.67×10^{-11} м^3/кг.с^2
Наклон на еклиптиката към небесния екватор $23°26'$
Звездна година 365.2564 денонощия